

*Die einfachsten Gebilde*

# *Simplices*

*Von der Planimetrie*

*zur vier-dimensionalen*

*Raum-Geometrie*

Nur **Albert Einstein** hat es geschafft, die Ebene der Programmierung zu verlassen, und in den Dreidimensionalen Raum aufzusteigen.

Aber auch diesen hat er alsbald wieder verlassen und ist in den Hyperraum, in die vierte Dimension verschwunden!

>>Welt am Draht<<  
von Rainer Werner **Fassbinder**

## Vorwort

Eine Formel für rationale Tetraeder mit verschiedenen ganzzahligen Kantenlängen aufzustellen, oder einen Tetraeder mit den Ecken als Zentren von sich vier küssender Kugeln, ist sehr aufwendig. Auch die unbekannte Formel von Descartes für vier sich küssende Kreise auf sich küssende Kugeln zu erweitern, daran bin ich ziemlich gescheitert!

Ich möchte aber so schnell wie möglich ins Vierdimensionale aufsteigen! Denn die eigentliche Mathematik fängt erst da an, wo die Anschauung versagt!

Wenn die Mathe-Unkundigen behaupten, daß es **Unsinn bzw. Unnütz** wäre, da beginnt die Mathematik erst! Denn gerade dann zeigt sich ihre Magie und Stärke! Man denke nur an die negativen Zahlen, die lange nicht als Zahlen galten, oder an **die Wurzel aus Minus EINS**, auch imaginäre Einheit.  $i = \sqrt{-1}$  genannt, eine **Drehung** (der reellen Einheit

für die x-Achse) **um 90 Grad** zur Einheit der y-Achse. Jeder Punkt der Ebene ist nun durch eine einzige komplexe Zahl darstellbar! In Geradengleichungen tritt zB. nicht mehr x und y auf, sondern nur noch eine einzige Variable  $z = x + iy$  (allerdings zugleich mit ihrer konjugiert komplexen Form  $z^* = x - iy$ ).

Das sei doch Unsinn, barer, und das Kulturministerium nahm sogar alles was mit komplexen Zahlen zu tun hat, aus dem Lehrplan heraus Ganz abgesehen davon, daß sie auch die Kugelgleichung gestrichen haben, denn der Kreisgleichung sei ja auch nicht so wichtig, sei nicht elementar!. Dabei kann aber die Physik weder in der ART noch in der Quantenmechanik (oder auch nur die Wellen- und E-Lehre auf die komplexen Zahlen verzichten. Und die komplexen Zahlen sind die letzte mögliche, vollkommene Zahlbereichserweiterung<sup>1</sup> mit der nicht nur in der Planimetrie sensationelle Erfolge erzielt wurden. Vermutlich werden die Quaternionen im vierdimensionalen Raum entsprechend hilfreich sein, jedenfalls verwendet sie die NASA bei der Berechnung von Drehungen im Raum.

Auch gekrümmte Räume verweist man ins Land Utopia, sprich hielten sie für eine Judenirrführungslehre (sogar Physik-Nobelpreisträger wie Lenard und Stark).

Die Beschäftigung mit dem Vierdimensionalen sei nur eine Spinnerei!

Ich spinne, also bin ich, würde der große Philosoph und Denker Descartes<sup>2</sup> gesagt haben, wenn er nicht unauffällig hätte bleiben wollen!

Die Welt ist eben ein überfülltes Irrenhaus,

aber die Irren werden nicht weniger!

---

<sup>1</sup> Bei den Quaternionen ist die Multiplikation nicht mehr kommutativ zB. für je zwei imaginäre Einheiten ist sie antikommutativ:  $i \text{ mal } k = - k \text{ mal } i$

<sup>2</sup> Aus dem Wort leitet sich das Koordinatensystem ab.

## Einleitung

Bei meiner Präsentation der >> Einfachsten Gebilde << handelt es sich um eine Vorbereitung auf den **Einstieg in Höhere Dimensionen**. Genauer gesagt, von der Dritten in die vierte Dimension, wobei wir uns natürlich zuerst einmal ganz genau anschauen, wie man von der Ebene zum 3D-Raum gelangt. **Klar ist, daß man nicht alles sofort auf Anhieb verstehen kann**. Wenn ich ein Gedicht kurz anschauere, kann ich es ja auch nicht sofort auswendig oder gar völlig verstehen. **Man muß es öfter lesen und sich immer wieder damit beschäftigen**, und sehr viel Gedankenarbeit investieren, damit man es nach und nach immer ein bisschen besser versteht! Aber daß man beim Duschen, nachdem man es nur einmal gelesen hat, dann plötzlich die große Erleuchtung erwartet, das kann doch nicht wahr sein. Vielleicht braucht man Jahre und manche vielleicht Jahrzehnte, und/oder es braucht eigene kreative Tätigkeiten, bis man es endlich wirklich versteht!

## >> **Mathematik ist vielmehr eine Tätigkeit als eine Lehre!**

**Denken ist ja auch eine Tätigkeit, für die sich aber manche überhaupt nicht anstrengen wollen!**

Meine Ausführungen beginnen mit der Planimetrie und der einfachsten Überlegung, wie man vom Kreis zur Kugel gelangt. Nämlich durch Rotation um einen Durchmesser in die neue Dimension hinein. Schließlich wollen wir dann entsprechen von der Kugel zur Hypersphäre gelangen! Die vierdimensionale Hyperkugel erhalten wir dann durch die Rotation der Kugel um einen maximalen Schnittkreis in die unsichtbare 4. Dimension hinein; jeder Ebenenschnitt ist also eine Kugel!

Im ebenen Fall dreht man um einen Punkt, im Raum muß man um eine Achse drehen und im Vierdimensionalen um eine Ebene. Bei allen Drehungen bleibt der Drehsinn oder die Orientierung erhalten, während sie sich bei Spiegelungen sich umgekehrt. In der Ebene kann man an einer Achse spiegeln (Klappung um eine Achse), aber im Raum kann man an einer Ebene spiegeln um den linken Schuh (oder Hand) zu einen rechten zu machen, oder die Rechte-Hand-Regel (etwa für die Lorenz-Kraft) in eine Linkssystem-Regel zu verwandeln. Im Vierdimensionalen gibt es dann eine den Drehsinn ändernde Raumspiegelung. Aber unsere Anschauung kann das nicht mehr (be)greifen.

Bei der vierdimensionalen Kugel ist jeder Schnitt durchs Zentrum eine Kugel, entsprechend wie jeder Kugelschnitt mit einer Zentralenbene ein Kreis ist, und jede Zentrale beim Kreis einen Durchmesser ausschneidet.

Die Hyperkugel erhalten wir also durch die Rotation der Kugel um eine Schnitkreisebene in die 'unsichtbare' 4. Dimension hinein! Volumenmäßig ist das allerdings eher eine Multiplikation eines Kreises mit einem Kreis in den zwei anderen Dimensionen zu sein, wobei man den Inhalt dann verdoppelt bekommt:

**$V_4$  enthält nämlich in der Formel neben  $r^4$  auch  $\pi^2$ <sup>3</sup>**

denn 
$$V_4 = \frac{1}{2}\pi^2 r^4 = \frac{1}{2}\pi r^2 \text{ mal } \pi r^2$$

und der sie begrenzende Raum ist 
$$O_4 = 2\pi^2 r^4$$

Der Kreisinhalt ist kleiner als  $4r^2$

Das Kugelvolumen ist kleiner als  $8 r^3$ , nämlich etwa  $4 r^3$  ( $\pi \approx 3$ )

Der vierdimensionale Rauminhalt einer vierdimensionalen Kugel ist kleiner als  $16 r^4$ , nämlich etwa  $5 r^4$ . ( $\pi^2 \approx 10$ ), und weniger Oberfläche bei gleichem Inhalt hat kein anderer 4D-Körper oder vierdimensionales Gebilde (Isoperimetrie)!

---

<sup>3</sup> Interessanterweise ist Das Quadrat<sup>3</sup> von Pi ist fast gleich der Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ M/sec}^2$ !

Wissen sie übrigens, daß die gewölbte **Halbkugeloberfläche haargenau doppelt so groß ist, wie ihr größter Schnittkreis?**

Oder wissen sie, welches Volumen die Einheitskugel im UNENDLICH-DIMENSIONALEN Raum hat?<sup>4</sup>

$$O_3 = 3 V_3 / r = 4\pi r^2 \quad (\text{allgemein } O_n = n V_n / r)$$

$$\text{für } n=2: \pi r^2 \text{ ----} \rightarrow 2\pi r$$

$$\text{für } n=3: 4/3\pi r^3 \text{ ----} \rightarrow 4\pi r^2$$

$$V_n = \pi^{1/2n} / (1/2n)! r^n$$

Ja, **es gibt auch halbzahlige FAKULTÄTEN**<sup>5</sup>:

<sup>4</sup> Nein, falsch – da gibt es gar keine Kugeln mehr, denn alle Radien verschwinden  
Die Fakultätsfunktion (n/2)-Fakultät im Nenner geht viel schneller nach unendlich, als jede Potenzfunktion wie Pi-hoch n/2

<sup>5</sup> Fakultäten gibt es auch für andere nicht-ganze Zahlen<sup>5</sup>, ja sogar für komplexe Werte.

Die Erweiterung geschieht mit der sog. **Gammafunktion**:  $\Gamma(n+1) = n!$

wegen  $\Gamma(n+1)=n \Gamma(n)$  Die Gammafunktion wurde von **Euler 1729**

zunächst als unendliches **Produkt**

$$1/x \prod_{n=1}^{\infty} (1+1/n)^x : (1+x/n)$$
 eingeführt,

bevor sie Legendre später dann als das (uneigentliche) Eulersche Integral zweiter

Gattung definierte:  $n! = \int_0^{\infty} x^n / e^x dx$ , übrigens ist  $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \pi : \sin \pi x$

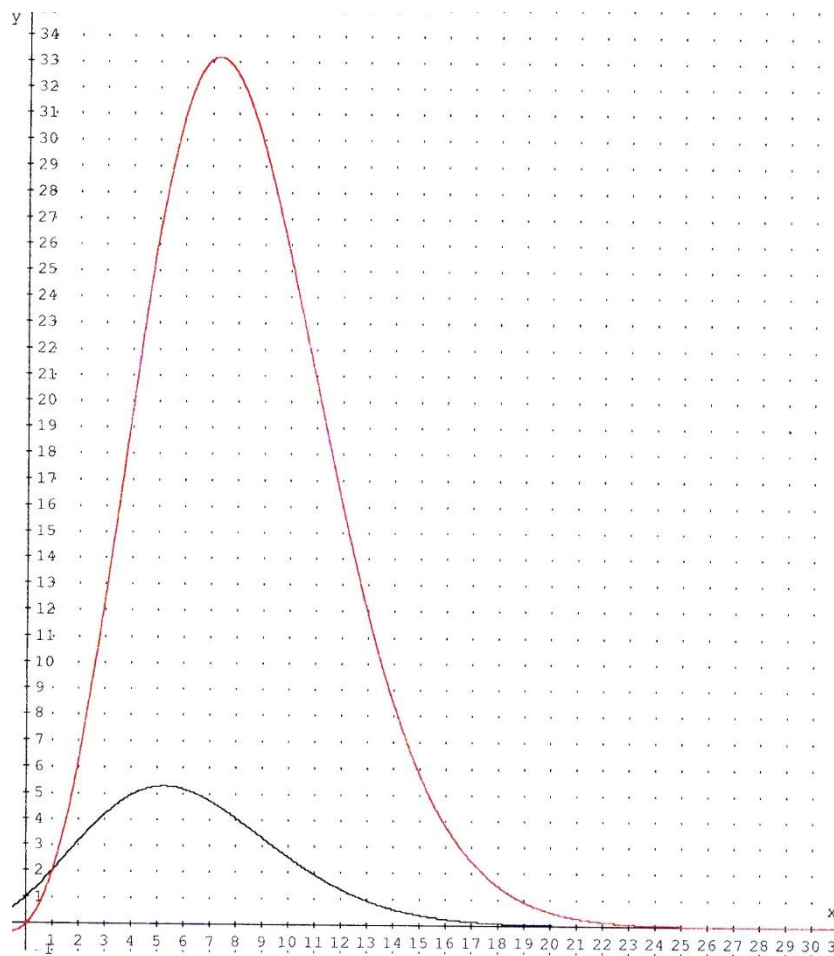
Die Fakultätsfunktion wird nie Null! Daher kann man gut mit ihrem Kehrwert arbeiten, der bei den negativen Polen verschwindet.  $0! = 1 = 1! = 1$   
dazwischen liegt bei  $1/e$  ein Minimum, aber keine Nullstelle!



$$3/2\text{-Fakultät} = 3/2 \text{ mal } 1/2! = 3/4\sqrt{\pi}$$

$$3/2! = 3/2 \text{ mal } 1/2! = 3/2 \cdot 1/2\sqrt{\pi}$$

$$V_3 = \pi^{(1+1/2)} / (3/4 \pi^{1/2}) \quad r^3 = 4/3 \pi r^3$$



**Volumen  $V_n$  und Oberfläche  $O_n$**  der n-dim. Einheitskugeln

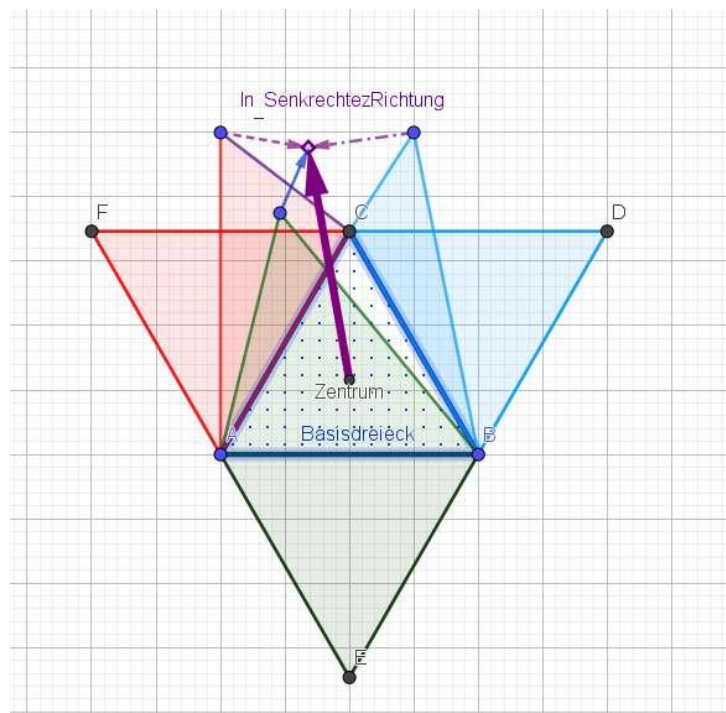
Maximum des Volumens bei  $n=5$  und maximale Oberfläche bei  $n=7$

Bereits für  $n=30$  ist das Volumen von Null nicht mehr zu unterscheiden!

$$\lim_{(n \rightarrow \infty)} V_n = 0$$

Es gibt **im Unendlichdimensionalen keine Kugeln mehr!**

Aber nun wieder zum Thema zurück. Das einfachste ebene Gebilde (Simplex) ist das Dreieck. Wir kommen vom gleichseitigen Dreieck zum regelmäßigen Tetraeder, indem wir an den drei Seiten drei ebensolche angeheftete Dreiecke in den Raum drehen, über  $90^\circ$ , bis sich alle drei äußeren Spitzen auf der senkrechten Achse in die neue Dimensionsrichtung vereinigen. Diese Symmetrieachse geht durchs Basiszentrum in z-Richtung, und das neue Zentrum der regelmäßigen Pyramide liegt auf dieser und zwar im Abstand von  $\frac{1}{4}h_K$  vom Grunddreieck<sup>6</sup>.



Berechnung der Körperhöhe aus Flächenhöhe  $h$  zu  $(\sqrt{2} / \sqrt{3}) a$

Berechnen wir nun die Körperhöhe  $h_K$  und das Volumen des regelmäßigen Tetraeders (Vierflächners) Die Höhen  $h$  oder die Seitenhalbierenden (Mittelsenkrehtenschnitt-, Höhenschnitt-,

<sup>6</sup> Beim reg. Dreieck ist es  $\frac{1}{3} h$  von der Grundseite, beim reg Tetraeder  $\frac{1}{4} h_K$  von der Grundfläche und beim reg.  $n$ -dim Simplex wird das Zentrum  $\frac{1}{(n+1)}$ -tel der Simplexhöhe von  $(n-1)$ -dimensionalen vom Basissimplex entfernt sein.

Winkelhalbierenden-, Gergonne-, Nagel-, und Mitttenpunnkt sowie alle anderen besonderen Punkte fallen ja zusammen, und wir sprechen daher vom Zentrum) sind die längsten Strecken im gleichseitigen Dreieck. Sie bildet die **Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks** der Abbildung oben. Die Katheten sind  $1/3 h$  von der Seitenmitte zum Zentrum und die Körperhöhe  $h_K$ . Nach Pythagoras gilt

$$h^2 = (1/3 h)^2 + h_K^2$$

$$h_K^2 = 8h^2/9$$

$$\boxed{h_K =} 2\sqrt{2} h/3 = 2\sqrt{2} (1/2\sqrt{3} a)/3 / \sqrt{3}^2 \boxed{= (\sqrt{2} / \sqrt{3}) a}$$

$$\boxed{V = \sqrt{2}/12 a^3}$$

Das Zentrum teilt die Körperhöhe in 1 zu 3 Teile (von der Grundfläche her liegt das Zentrum bei  $1/4 h$ , von der Spitze her bei  $3/4 h$  ), anders als beim reg. Dreieck, wo  $h$  im Verhältnis 2 zu 1 geteilt wird<sup>7</sup>. Daher ist auch der Umkugelradius

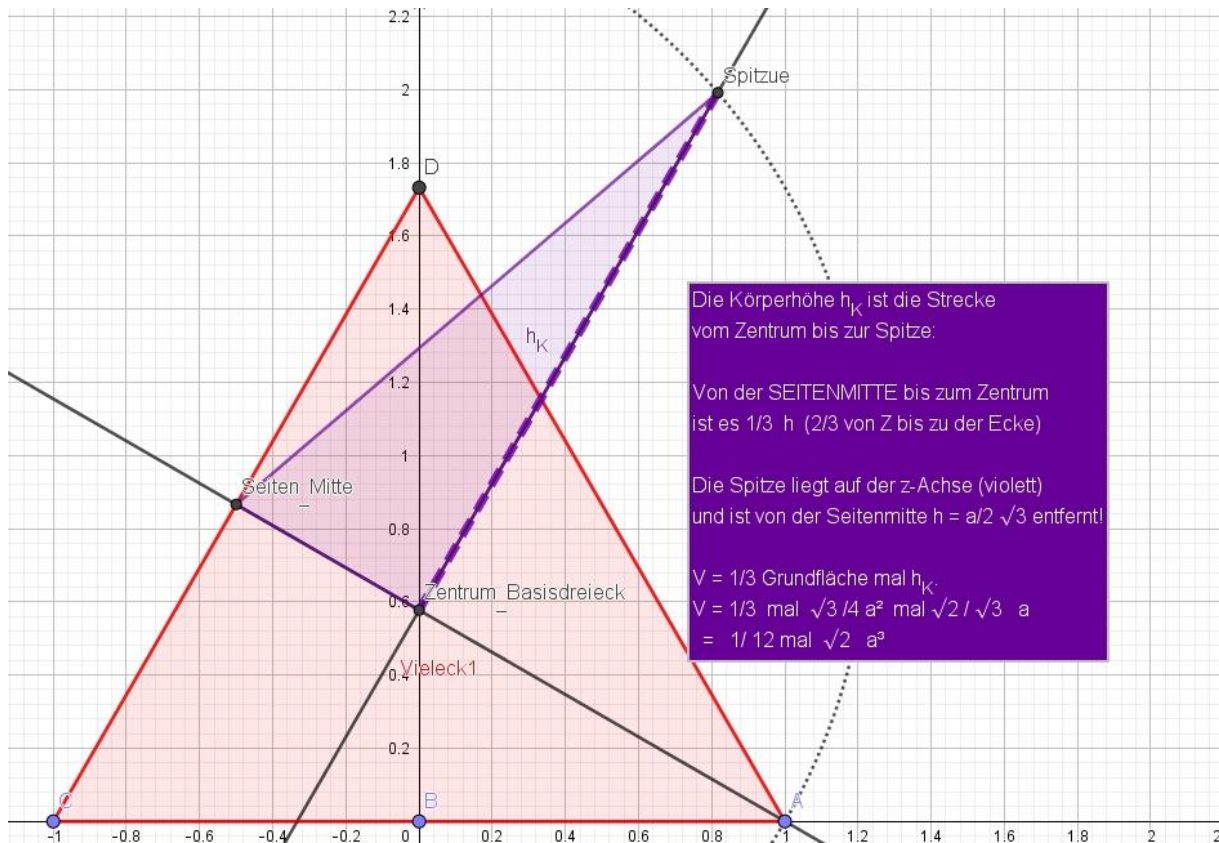
$$R = (\sqrt{6} /4)a$$

nun dreimal so groß wie der Inkugelradius  $r = (\sqrt{6} /12)a$ .

Im n-dimensionalen Fall ist die Umhyperkugel also n-mal so gross wie die Inhyperkugel. Beim reg. Hypertetraeder wird die Höhe dann im Verhältnis 1 zu 5 geteilt und die Hyperumkugel hat einen viermal größeren Radius als die Hyperinkugel.

---

<sup>7</sup> Beim reg. Hypertetraeder wird die Höhe dann im Verhältnis 1 zu 5 geteilt und die Hyperumkugel hat einen viermal größeren Radius als die Hyperinkugel.



Analog können wir dann zum einfachsten regelmäßigen vierdimensionalen Tetraeder gelangen, indem wir an die vier Begrenzungsdreiecken vier ebensolche Tetraeder 'ankleben' und um die jeweilige Dreiecksebene in die neue 4. Dimension hineindrehen, solange bis sich deren vier äußeren Spitzen zu einem Punkt vereinen, dem fünften Eckpunkt des Hypertetraeders. Zu sehen ist nur der Basistetraeder, wo  $w=0$  ist, denn die vier aufgesetzten liegen in  $w>0$  oder  $w<0$ . Natürlich versagt bei vier Dimensionen unsere Anschauung, und wir können nur einen dreidimensionalen Schnitt des  $(x, y, z, w)$ -Raumes erkennen!

Jeden beliebigen Tetraeder kann man zur Basis eines vierdim. Hypertetraeders machen, in dem man sich einen fünften Punkt im Vierdimensionalen (mit w-Wert in der 4. Ausdehnungsrichtung) als -HyperSpitze holt. Die Verbindung der 5. zu den anderen 4 Ecken reicht aber nicht – sonst würde es ja „rein regnen“! Die Begrenzungen sind dann die ins Vierdimensionale reichenden (und daher im 3D-Raum nicht sichtbaren) **vier Tetraeder auf jeder der vier begrenzenden Tetraederdreiecke**. Es gibt also nicht nur 5 Ecken, sondern auch fünf Tetraeder als räumliche `Oberfläche`!

Und 5 Tetraeder haben  $5 \times 4 = 20$  Grenzdreiecke, von denen aber immer 2 gemeinsam zu einem `verschmelzen`, dann waren ` nur noch zehn (kleine Negerlein).

Die haben eigentlich  $5 \times 6 = 30$  Kanten. Aber auch ein Tetraeder hat vier Grenzdreiecke und aber nicht 12 Kanten: drei beim Basisdreieck und drei weitere von den 3 Basisecken zur Spitze. Sollen es da auch nur zehn kleine Negerlein sein?

Ganz klar. Fünf Punkte (Ecken) kann man nur mit  $5 \times 4 / 2 = 10$  Strecken verbinden. Die 30 Kanten sind sozusagen dreifach übereinander gelegt.

Also hat jeder vierdimensionale Tetraeder als Begrenzung

$(5 \text{ über } 1) = 5$  Ecken                       $(5 \text{ über } 2) = 10$  Kanten

$(5 \text{ über } 3) = 10$  Dreiecke                   $(5 \text{ über } 4) = 5$  Tetraeder

**Das Pascalsche Dreieck läßt grüßen!**

Das fünfdimensionale Simplex besteht also aus

$$(6 \text{ über } 1) = \mathbf{6 \text{ ECKEN}}$$

$$(6 \text{ über } 2) = 6 \text{mal}5 \text{ durch } 2 = \mathbf{15 \text{ Kanten}}$$

$$(6 \text{ über } 3) = 6 \text{mal}5 \text{mal}4 \text{ durch } 3! = \mathbf{20 \text{ Dreiecken}}$$

$$(6 \text{ über } 4) = (6 \text{ über } 2) = \mathbf{15 \text{ Tetraedern}}$$

$$(6 \text{ über } 5) = (6 \text{ über } 1) = \mathbf{6 \text{ vierdimensionalen Tetraedern}}$$

(zuweilen auch als die Zellen bezeichnet)

$$\text{Summe } 2^6 - 2 \text{ (hier } 62)$$

Aber das wollen wir nicht weiter spinnen!

Das Volumen der reg. n-dimensionalen Simplices mit Kante  $a^8$

$$V_n = \sqrt{(n+1)} a^n / \{n! 2^{1/2 n}\}$$

$$n=2 \text{ reg. Dreieck} \quad A = \sqrt{3} a^2 / 4$$

$$\begin{aligned} n=3 \quad V_3 &= \sqrt{(3+1)} a^3 / \{3! 2^{1/2}\} \\ &= a^3 / \{3! 2^{1/2}\} \\ &= \sqrt{2} / 12 a^3 \end{aligned}$$

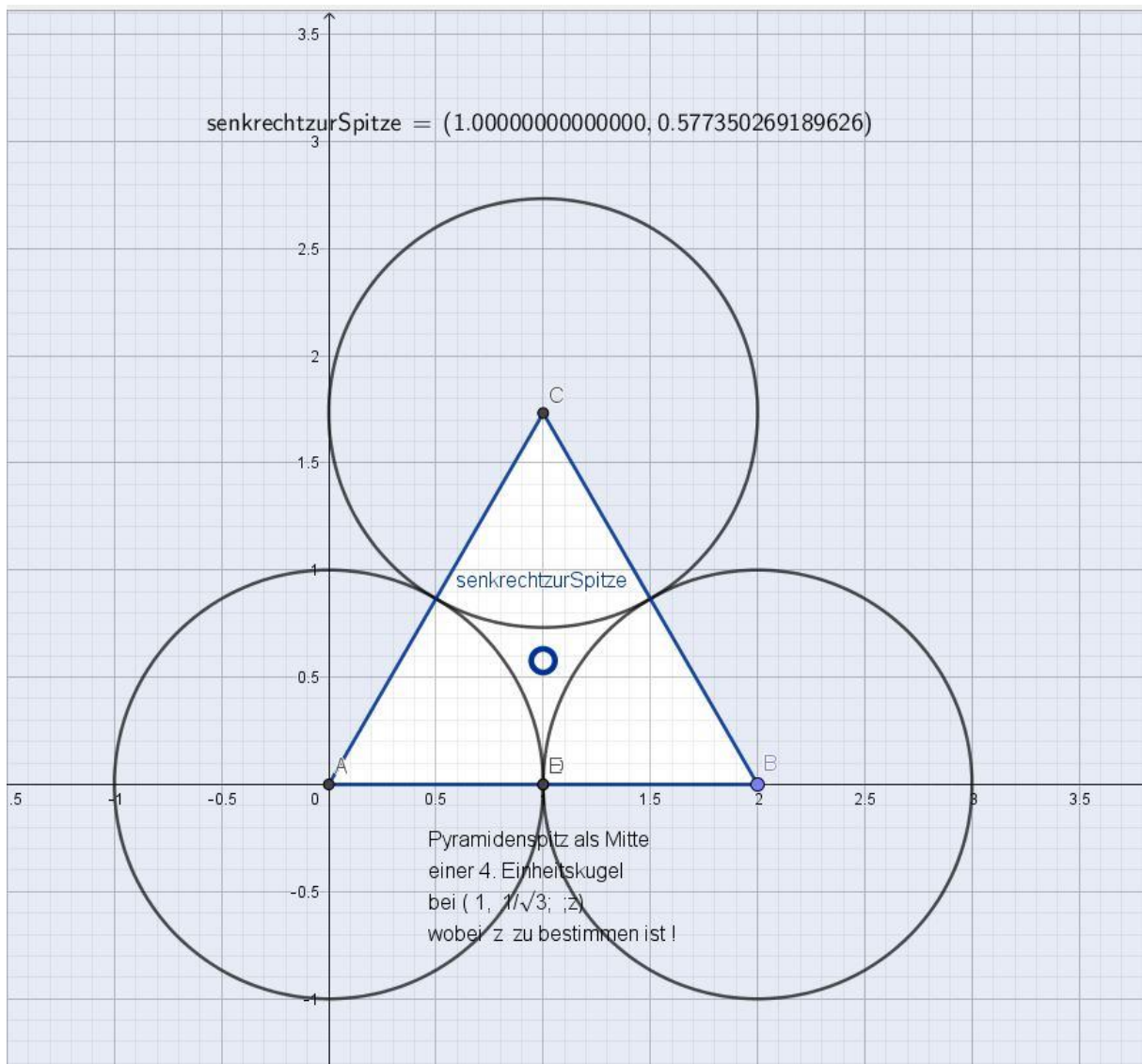
$$n=4 \quad V_4 = \sqrt{5} / 96 a^4$$

---

<sup>8</sup> Wie mir gerade auffällt, verschwindet auch der unendlich-dimensionale Tetraeder – klar, wenn die Kugeln verschwinden, verschwindet auch alles was in der Kugel sein könnte! Aber der unendlich-dimensionale Einheitswürfel hat per Definition die Maßzahl  $1 \neq 0$   
Widerspruch!!!

Kann 's das Unendliche-Dimensionale gar nicht geben, wenn da ja nichts mehr drin ist ?

Eine andere Möglichkeit zum einfachsten regelmäßigen Körper zu gelangen, ist beispielsweise, mit vier gleich großen sich küssenden Kugeln zu arbeiten, deren Zentren man verbindet.



Rotation der beiden unteren Kreise um die x-Achse und der oberen rotiere um die y-Achse (genauer: eine durchs Dreiecks-Zentrum gehende Parallele zur y-Achse).

Wir setzen eine vierte gleichgroße Kugel auf. Denke einfach an drei Apfelsinen, die sich alle berühren, und du setzt eine 4. Orange darauf.

Beim regelmäßigen Tetraeder haben wir also eine gleichgroße vierte Kugel aufgesetzt. Man könnte jetzt auf die drei Einheitskugeln eine andere 4. Kugel zB. mit dem Radius 2 oder 3 usw. aufsetzen,

- es gibt **unendlich viele Möglichkeiten** -

und das Zentrum dieser Kugeln berechnen, wobei sich ja nur der z-Wert ändert.

Die Radien müssen nur größer als die Differenz der

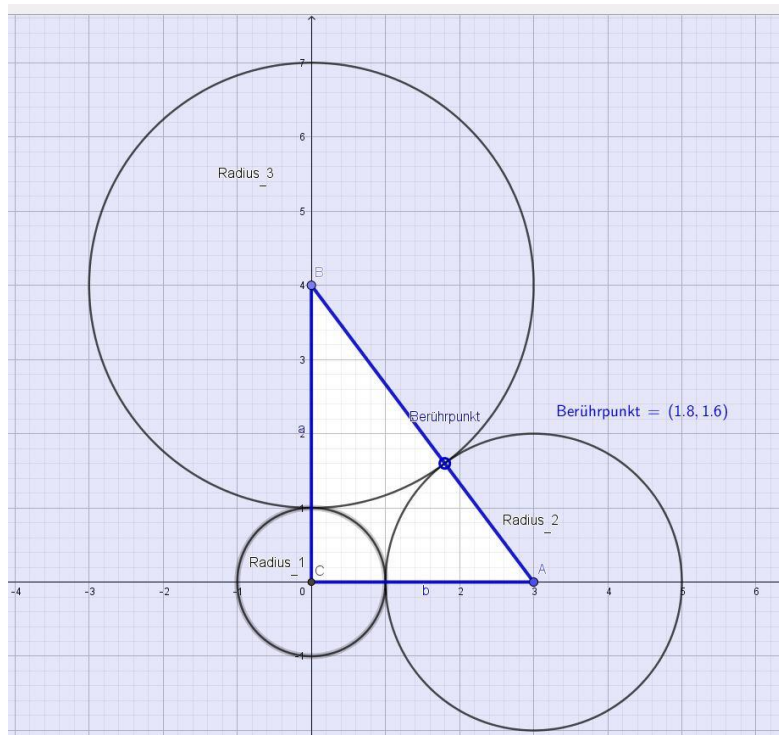
Länge  $\sqrt{2}$  bis zum Schwerpunkt und der Eins für den Einheitskugelradius sein:

$$r > (1 - 2/\sqrt{3})$$

Wenn wir jetzt zum allgemeineren Dreieck kommen, dann führt das zum allgemeinen Tetraeder, und vom allg. Tetraeder zum allgemeinen 4-dim. Simplex. Nun verwende ich natürlich kein beliebiges Dreieck, sondern das Standard-Dreieck, genauso wie ich beim Übergang ins Vierdimensionalen für das allgemeine 4-dim. Simplex einen Standard-Tetraeder verwenden werde. Warum, weil es am einfachsten und am übersichtlichsten ist, und am ehesten schöne (vielleicht sogar ganzzahlige) Werte liefert! Das Standard-Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 sei der Querschnitt der drei in den Raum erweiterten



Basiskugeln: Drei Kugeln mit den Radien 1, 2 und 3 küssen sich!



Wir setzen noch eine Kugel darauf, die alle diese drei Kugeln berührt. Es gibt wohl auch unendlich viele Möglichkeiten.

Mit drei Gleichungen vier Unbekannte zu berechnen, ist müßig. Daher wähle ich einen **Radius mit der Länge  $r = 2,5$  zu den anderen Kugelradien von 1, 2 und 3**. Ich hätte auch  $r = 4$  wählen können, aber diese Wahl von 2,5 liefert bei der Verdoppelung aller Kanten gerade meine Standardpyramide, mit den sechs ganzzahligen Kantenlängen von 6 bis 11 und mit dem Volumen  $V=48$ .

Natürlich kennen wir die Berührungspunkte dieser drei Kugeln, aber wir wollen das mal rechnerisch mit den Kugelgleichungen nachvollziehen, als ob wir keine Anschauung hätten (wie später im Vierdimensionalen)!

Die ersten beiden Kugeln mit dem Radius 1 und 2 sind:

Die Einheitskugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 1^2$

und  $(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 2^2$

Schneiden wir die beiden Kugeln, dann müssen wir zuerst beide Gleichungen subtrahieren und erhalten

$$\begin{array}{r} x^2 - 6x + 9 + y^2 + z^2 = 4 \\ -x^2 \qquad \qquad -y^2 - z^2 = -1 \\ \hline \end{array}$$

Die Schnittebene  $-6x = -6$   
 $x = 1$

Diese sog. Polaren-Ebene ist  $x = 1$ , die man dann nochmals mit einer der beiden Kugeln schneiden muß. Man erhält

$$y^2 + z^2 = 0$$

Tatsächlich sind im Berührungspunkt  $y=0$  und  $z=0$ , denn die Quadrate sind immer positiv und die Summe verschwindet dann und nur dann wenn  $y$  und  $z$  zugleich Null sind.

Der einzige Schnittpunkt ist also **( 1 , 0 ; 0 )**, ein **Berührungspunkt!**

Analog erhalten wir für den Schnitt der Einheitskugel mit

$$x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3^2$$

den Berührungspunkt **( 0 ; 1 ; 0 )** auf der  $y$ -Achse bei  $y = 1$

Für den dritten Berührungspunkt haben wir

$$x^2 + y^2 - 8y + 16 + z^2 = 3^2$$

und  $(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 2^2$

was subtrahiert

$$-8y + 6x = -2$$

$$y = (1+3x)/4 \text{ liefert}$$

eingesetzt

$$(*) \dots \dots x^2 + [(1+3x)/4]^2 - 8[(1+3x)/4] + 16 + z^2 = 3^2$$

bzw. in

$$(**) (x-3)^2 + [(1+3x)/4]^2 + z^2 = 2^2$$

ergibt letztlich<sup>9</sup>. (mit  $z=0$   $x=1,8$   $y=1,6$ )

den Berührungspunkt **(1,8; 1,6; 0)** !

---

Nun wollen wir **eine vierte Kugel aufsetzen**.

Sei ihre Mitte  $(u; v; w)$  mit dem Radius  $r$ .

$$\dots (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = r^2 \dots$$

Die drei neuen Kanten haben die Längen  $r+1$ ,  $r+2$  und  $r+3$ , was drei Gleichungen für drei Unbekannte liefert.

$$|AS| = r+2 \rightarrow [(3, 0, 0) - (u, v, w)]^2 = (r+2)^2$$

$$|BS| = r+3 \rightarrow [(0, 4, 0) - (u, v, w)]^2 = (r+3)^2$$

$$|CS| = r+1 \rightarrow u^2 + v^2 + w^2 = (r+1)^2$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = (r+1)^2$$

---

<sup>9</sup>  $z=0$  weil die  $(x, y)$ -Grund-Ebene die Symmetrie-Ebene ist:

$$x=1,8 \rightarrow y=1,6$$

Lasset uns  $r=2,5$  wählen

Die Gleichungen lauten nun:

$$\text{I} \quad u^2 + v^2 + w^2 = 3,5^2$$

erste Gleichung

$$\text{II} \quad (u-3)^2 + v^2 + w^2 = 5,5^2$$

$$\text{III} \quad u^2 + (v-4)^2 + w^2 = 4,5^2$$

---

$$\text{II} - \text{I} \quad -6u + 9 = 18 \quad \rightarrow \quad \boxed{u = -3/2}$$

$$\text{III} - \text{I} \quad -8v + 16 = 20,25 - 12,25 = 8$$

$$-8v = -8 \quad \rightarrow \quad \boxed{v = 1}$$

---

Eingesetzt in die I.  $1,5^2 + 1^2 + w^3 = 12,25$

$$w^3 = 9 \quad \rightarrow \quad \boxed{w = 3}$$

Das Zentrum (die Pyramidenspitze) der 4. Kugel mit dem Radius  $r=2,5$  ist

$$\boxed{(-1,5; 1; 3)}$$

Der Fußpunkt der Spitze (Projektion auf die Grundebene  $z=0$ ) liegt ein-ein halb Einheiten vom Ursprung nach links und eine Einheit in  $y$ -Richtung bei  $(-1,5, 1, 0)$ .

Wenn wir dann in  $z$ -Richtung um drei Einheiten nach oben gehen, kommen wir zur Mitte der 4. Kugel um die Spitze mit  $r=2,5$ .

Und nun kommen wir zur **rationalen Standardpyramide**

mit nur ganzzahligen Kantenlängen, indem wir diese Pyramide mit  $k=2$  zentrisch strecken mit dem im Ursprung liegenden Steckungs-Zentrum C:

$A = (6; 0; 0)$ ,  $B = (0, 8, 0)$  und **Spitze S = (-3, 2, 6)**

Das in der Grundebene liegende Basis-Dreieck ist das doppelt so große Standard-Dreieck mit der vierfachen Fläche  $A = 24$

Da  $V = 1/3 Ah_K$  und die Körperhöhe  $h_K = 6$  (die z-Koordinate der Spitze!) ist, erhalten wir als Pyramidenvolumen **V = 48**

Die Kantenlängen sind alle ganzzahlig: 6, 7, 8, 9, 10 und 11

**Wir haben nun die Kantenlängen mit dem verdoppelten Standard-Dreieck der Tangentialkreisradien 2, 4 und 6 als Basis**, wobei  $2+4=6$ ,  $2+6=8$  und  $4+6=10$  seine Seitenlängen sind. Aber wie errechne ich die übrigen drei räumlichen Kantenlängen aus den vier Kugelradien 2, 4, 6 und 5?

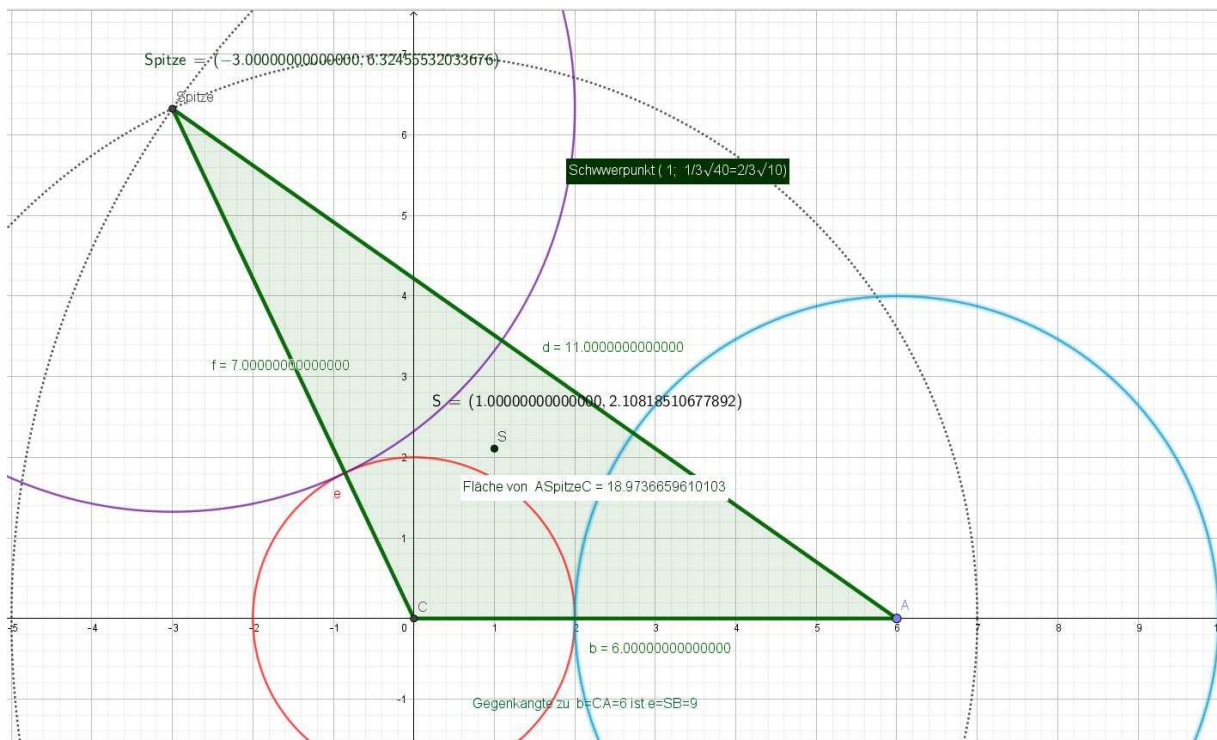
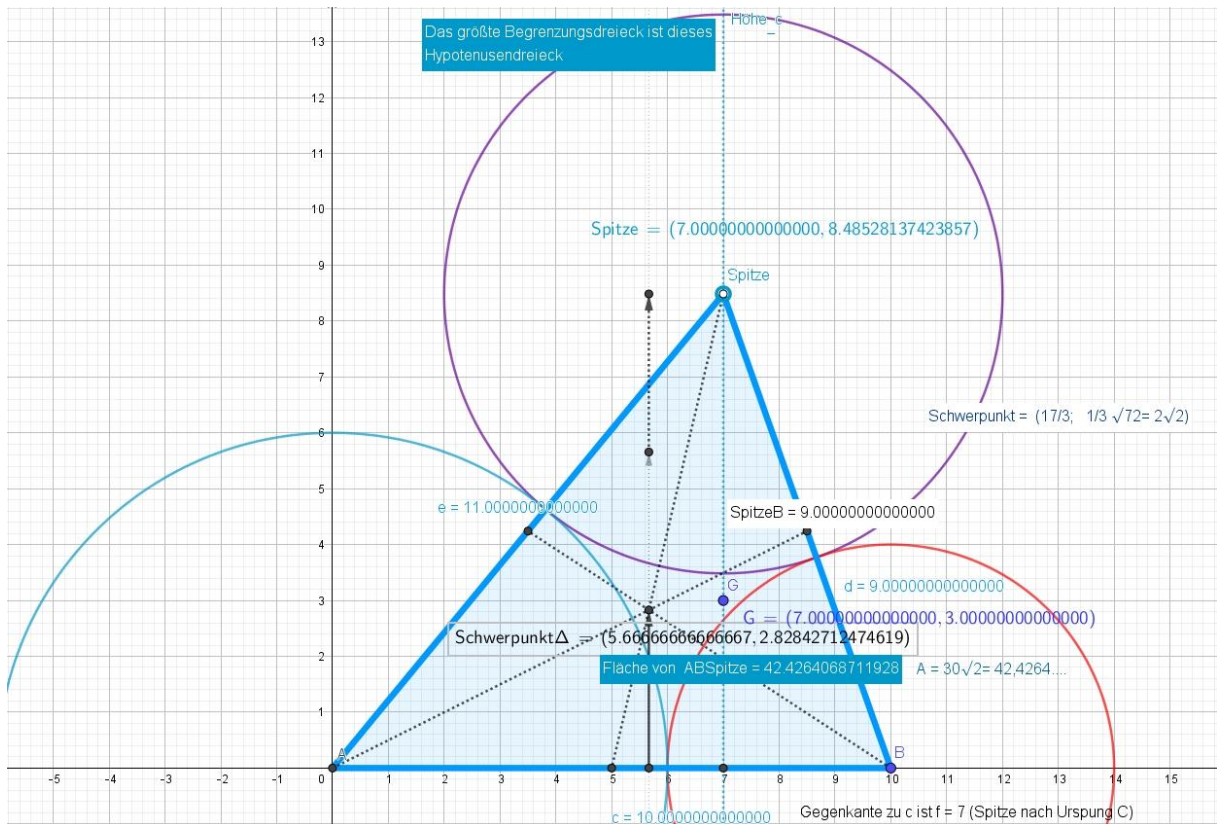
$$2 + 5 = \mathbf{7} = f$$

$$4 + 5 = \mathbf{9} = d$$

$$6 + 5 = \mathbf{11} = e$$

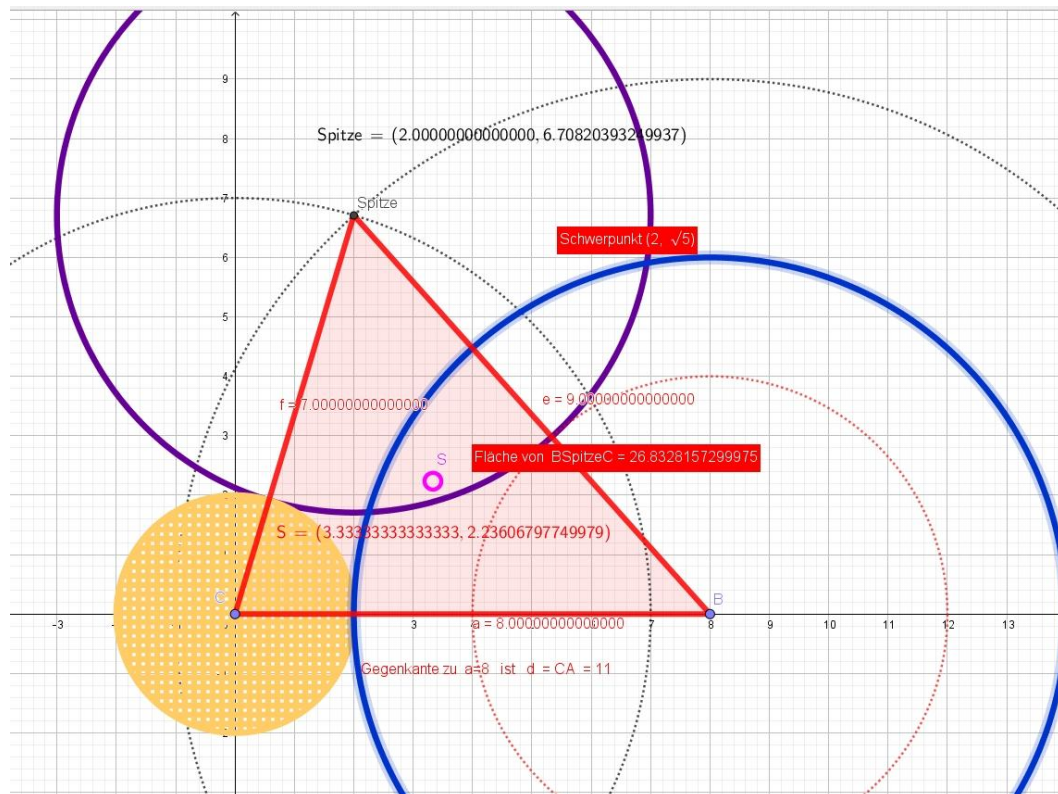
Es gibt aber keine analoge allgemeine Formel wie fürs Dreieck, bei der man **die Summe zweier Seiten und davon die Dritte subtrahiert** (ist nach Dreiecksungleichung ist diese immer größer Null), was die doppelten Tangentenabschnitte liefert!

Hier die drei räumlichen Begrenzungsdreiecke  
(Basisdreieck ist doppeltes Standarddreieck)



Die Kugeln berühren sich nicht auf der längsten Seite  $11 = 5 + 6!$

**Leider berührt die vierte Kugel aber nicht die drei anderen, sondern die um die Spitze mit  $r=5$  schneidet sich mit der **Tangentialabschnittskugel um B** mit  $r=6$  in einem Schnittkreis. Die vier Kugeln küssen sich also nicht.**



Ganz wichtig ist bei unserem Standard-Tetraeder mit den Kantenlängen 6 bis 11 die richtige Zuordnung der Kanten zu ihren **Gegenkanten!**

(MERKE: hier ist die Differenz immer drei im Betrag):

Nennen wir die Gegenkante zu  $CA=\mathbf{a=6}$   $SB=\mathbf{d=9}$ , zu  $CB=\mathbf{b=8}$   $SA=\mathbf{e=11}$  und zu  $c$   $f$ , so erhalten wir als Ergebnis, das die **betragsmäßige Differenz** von Kante und Gegenkante **immer drei** ist! Zur Gegenkante der Länge  $\mathbf{f = 7}$  gehört die größte Hypotenusen-Basisseite  $\mathbf{c = 10}$  (hier wird also um 3 subtrahiert).

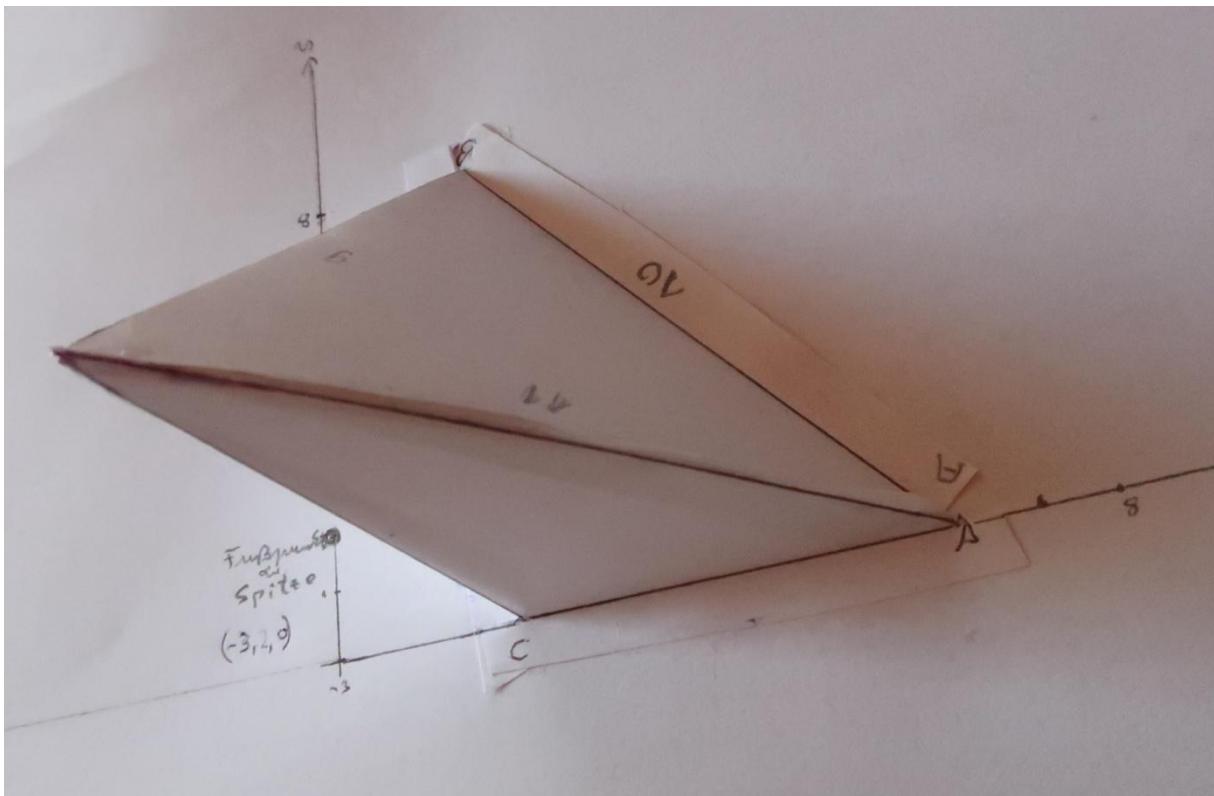


Die **Entfernungen zu den Basisdreiecks-Ecken vom Fußpunkt  $(-3, 2, 0)$  der Spitze** (welcher ja außerhalb der Basisfläche liegt<sup>10</sup>) sind:

$$\sqrt{13} \approx 3,6 \text{ zum Ursprung C}$$

$$\sqrt{45} \approx 6,7 \text{ zu B}$$

$$\sqrt{85} \approx 9,2 \text{ zu A}$$



C liegt im Ursprung, A auf der x-Achse und B auf der y-Achse

Kommen wir nun zu den Besonderen Punkten der Tetraeder.

<sup>10</sup> Die Projektion des Schwerpunkts  $(0,75; 2,5)$  liegt aber innerhalb, so daß sie nicht umkippt.



## Die Verbindungen von Kantenmitte und Gegenkantenmitte schneiden sich im Schwerpunkt der Pyramide!

Der Mittelpunkt von a ist  $M_a = \frac{1}{2}(6,0,0) = (3,0,0)$

und seiner Gegenkante

SB ist  $M_d = \frac{1}{2}\{(0,8,0) + (-3,2,6)\} = (-1,5; 5; 3)$

Die **Verbindungsmitte von  $M_a M_d = (0,75; 2,5; 1,5)$**

Die Mittelpunkte von b  $M_b = \frac{1}{2}(0,8,0) = (0,4,0)$

und seiner Gegenkante SA  $M_e = \frac{1}{2}\{(6,0,0) + (-3,2,6)\} = (1,5; 1; 3)$

Die **Verbindungsmitte von  $M_b M_e = (0,75; 2,5; 1,5)$**

Wir stellen die Identität fest!  $M_{M_a M_d} = M_{M_b M_e}$

**Wir zeigen noch die Gleichheit mit  $M_{M_c M_f}$**

Die Mittelpunkte von AB=c  $M_c = \frac{1}{2}(6,8,0) = (3,4,0)$

und seiner Gegenkante SC  $M_f = \frac{1}{2}\{0 + (-3,2,6)\} = (-1,5; 1; 3)$

Die Verbindungsmitte von  $M_c M_f = (0,75; 2,5; 1,5)$

**Die Verbindungen der Kantenmitten mit den Mitten der Gegenkante schneiden sich also in einem Punkt, nämlich in  $(0,75; 2,5; 1,5)$ , dem Schwerpunkt! Der läßt sich einfacher als  $\frac{1}{4}(A+B+C+Spitze)$  berechnen!**

Eindimensional: Strecke AB    Mitte =  $\frac{1}{2}(A+B)$

Zweidimensional: Dreieck ABC     $S = \frac{1}{3}(A+B+C)$

Dreidimensional Pyramide ABCD     $S = \frac{1}{4}(A+B+C+D)$

Vierdimensionaler Simplex ABCDE     $S = \frac{1}{5}(A+B+C+D+E)$

Das Zentrum der Umkugel unsere Standardpyramide ist

$$M_u = (3, 4, 4\frac{1}{4}) \rightarrow \text{AHANG}$$

Der **Inkugelmittelpunkt** ist  **$M_i$**

Den Inkugelradius  $r$  erhält man aus  $V = \frac{1}{3} O r$  zu  $r = 3V/O$

Für den Inkugelradius  $r$  müssen wir die Oberfläche berechnen:

### **Berechnung der Begrenzungsflächen**

Das Basis-Dreieck in der  $x/y$  Grund-Ebene mit den Seitenlängen 6, 8 und 10 ist das doppelte Standarddreieck (3, 4 und 5) mit der vierfachen Fläche des Standarddreiecks

$$A_{\Delta ABC} = 24$$

Das spitzwinklige 'Hypotenusendreieck' geht durch die Basis-Hypotenuse  $c$  und die Spitze (Gegenkante ist  $f = 7$ )

Es hat die größte Begrenzungsfläche von allen vier Oberflächendreiecken des Tetraeders

$$A_{ABS} \approx 42,426$$

Stumpfwinkliges durch die Basis-Kathete  $AC = b = 6$  und Spitze

$$A_{ACS} \approx 18.97366596$$

(Gegenkante ist  $e = 9$ )

Spitzwinkliges Begrenzungsdreieck  
durch die Basis Kathete  $BC = a = 8$  und Spitze  
(Überschneidung)

$$A_{BCS} \approx 26,8328$$

was in der Summe 112,23288855 ergibt!

Die Begrenzungsfläche (**Oberfläche**) ist **irrational**

$$O = 24 + 30\sqrt{2} + 6\sqrt{(2 \times 5)} + 12\sqrt{5}$$

$$\approx 112,2328886..$$

Wegen  $3V = rO$  erhält man den Inkugelradius  $r = 144/O$  zu  
etwa 1,283046368...

**Auch der Umkugelradius R ist irrational!**, weil die  
Oberfläche irrational ist ( $\rightarrow$ AHANG).

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{(13 \text{ mal } 53)}$$

Wenn wir den Umkugelradius haben, können wir nun auch die  
**Umkugelmittle  $M_u$**  berechnen!

Jeder Punkt, der gleichweit von den Basisdreiecksecken A, B  
und C entfernt ist, liegt auf der Senkrechten der Umkreismittle  
des Basisdreiecks, also auf der Geraden  $(3, 4, z)$ <sup>11</sup>

Die Entfernung zum Ursprung ist der Umkugelradius R:

$$\sqrt{(3^2+4^2+z^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{(13 \text{ mal } 53)}$$

<sup>11</sup> Er muß auf der Senkrechten zur Grundebene durch  $M_u = \frac{1}{2}(3, 4)$  liegen, da nur dort  
die Entfernungen zu den drei Grundecken A, B und C gleich sind!

$$z = \sqrt{(689/16 - 25)} = \sqrt{18,0625} = 4,25$$

Das **Zentrum der Umkugel** unsere Standardpyramide ist

$$M_U = (3, 4, 4\frac{1}{4})$$

**Damit können wir auch die EULER-Gerade M<sub>U</sub>S berechnen**

Der **Schwerpunkt** ist  $\frac{1}{4}\{(6,0,0)+(0,8,0)+(-3,2,6)\} = (0,75, 2,5, 1,5)$

Wie bereits gezeigt wurde, ist er der Schnittpunkt der Verbindungen der Mitten von Kanten und Gegenkanten.

Der Richtungsvektor der Euler-Geraden M<sub>U</sub>S ist

$$(3, 4, 4.25) - (0.75, 2.5, 1.5) = (2.25, 1.5, 2.75)$$

Das Vierfache davon ist  $\mathbf{n}=(10, 6, 11)$  und daher ist die **EULER-Gerade** unsere Standardpyramide

$$\mathbf{x} = (3, 4, 4,25) + \lambda(10, 6, 11)$$

Bekanntlich liegt beim Dreieck auch der Schwerpunkt  $S$  auf der EULER-Geraden. Da sich aber die Körperhöhen nicht in einem Punkt schneiden, bestimmen wir den  $H$  ersetzenden **Mongepunkt<sup>12!</sup>**

Bei einem beliebigen Tetraeder ist der **Punkt von Monge<sup>13</sup>** der Schnittpunkt der durch die Kantenmitten gehenden Ebenen, die senkrecht auf der jeweiligen Gegenkante stehen. Der Schwerpunkt  $S$  ist die Mitte der Verbindung vom Mongeschen Punkt und der Umkugelmittle  $M_u$ , wie wir noch bei den EULER-Tetraedern sehen werden:

$$|P_{\text{Monge}} S| : |SM_u| = 1 : 1$$

Der **Körper-Schwerpunkt  $S$**  ist  $\frac{1}{4}(A+B+\text{Spitze}) = \frac{1}{4}(3; 10, 6)$   
 $= (0.75, 2.5, 1.5)$

Das Zentrum der Umkugel ist  $M_u = (3, 4, 4\frac{1}{4})$ -----→ ANHANG

Wenn der **Schwerpunkt  $S$  nun die Mitte<sup>14</sup> vom Monge-Punkt und  $M_u$  ist**, dann hat der Punkt von **Monge die Koordinaten**

<sup>12</sup> Gaspard Monge (1746-1818), ein treuer Anhänger Napoleons, ist Differential-Geometer und Mitbegründer der Ecole Polytechnique, die 1794 in Paris gegründet wurde. Poncelet (1788-1876), der Vater der projektiven Geometrie, war ein Schüler Monges, der wiederum die euklidische Geometrie ins Wanken brachte und die Entwicklung Nichteuklidischer Geometrien über die Einführung dreier unterschiedlicher Metriken sehr förderte.

<sup>13</sup> sprich Monsch,

beachte aber im wohlklingenden Französischen die **on** (en in) **richtig auszusprechen!**

<sup>14</sup> Beim Dreieck ist die Mitte von  $M_u$  und  $H$  die EULER-Kreismitte, U know!

$$\text{Monge} = 2(0.75, 2.5, 1.5) - (3, 4, 4.25) =$$

$$= (-1,5; 1; -1,25)$$

Nehmen wir die Mitte der Kante  $f = \text{CSpitze} = \frac{1}{2}(-3; 2; 6) = (-1,5; 1; 3)$  die Gegenkante ist  $AB=c = (6; -8; 0)$  oder der Normalenvektor ist

$$\mathbf{n}^0 = 1/5 * (3; -4; 0) = (0,6; -0,8; 0)$$

$(0,6, -0,8; 0) [\mathbf{x} - (1,5; 1; 3)] = 0$  ist die Ebenengleichung

$$(0,6, -0,8; 0) \mathbf{x} - \{(0,6; -0,8; 0) * (-1,5; 1; 3)\} = -0,9 - 0,8 = -1,7$$

$0,6x - 0,8y = -1,7$  ist die Hesse-Normalenform

Erfüllt  $(-1,5; 1; -1,25)$  die Ebenengleichung ?

$$0,6 * (-1,5) - 0,8 * 1$$

$-0,9 - 0,8 = -1,7$  erfüllt also die HNF und liegt auf der Ebenen Kantenmitte senkrecht zur Gegenkante

Nehmen wir die Mitte der Kante  $e = \text{ASpitze}$  die Gegenkante ist  $BC=b=8$

Normalenvektor ist  $(0, 1, 0)$   $e$ -Kanten-Mitte  $= \frac{1}{2}\{(6,0,0) - (-3;2;6)\}$

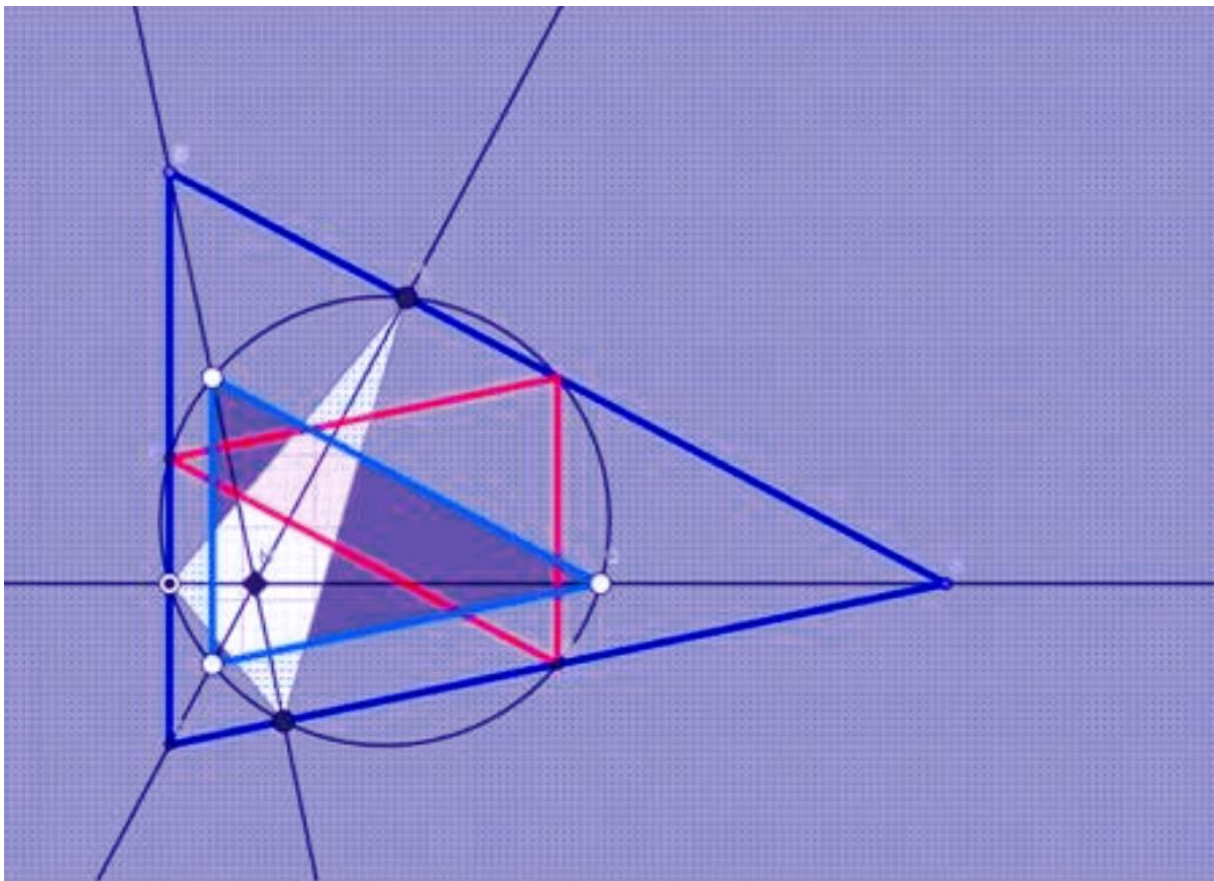
$$(0, 1; 0) [\mathbf{x} - (1,5; 1; 3)] = 0 \rightarrow y=1 \text{ Monge} = (-1,5; 1; -1,25) \text{ OK}$$

Einfacher geht's mit der Tabelle, sie zeigt, daß das Skalarprodukt von der Differenz (Monge-Punkt- Kantenmitte) und dem Normalenvektor verschwindet!

Kantenmitte	$(-1,5; 1; -1,25)$ -Kantenmitte	ist Vektor	Gegenkante ist: Normalenvektor	Skalar produkt
$M_a=(3, 0, 0)$	$(-1,5-3; 1; -1,25)$	$(-4,5; 1; -1,25)$	d: $(-3; -6; 6)$	=0
$M_b=(0, 4, 0)$	$(-1,5; 1-4; -1,25)$	$(-1,5; -3; -1,25)$	e: $(-9; 2; 6)$	=0
$M_c=(3; -4; 0)$	$(-1,5-3; 1-4; -1,25)$	$(-4,5; -3; -1,25)$	f: $(-3; 2; 6)$	=0
$M_d=(-1,5, 1, 3)$	$(-1,5+1,5; 1-1; -1,25-3)$	$(0; 0; -3,75)$	a: $(1; 0; 0)$	=0
$M_e=(1,5, 1, 3)$	$(-1,5-1,5; 1-1; -1,25-3)$	$(-3; 0; -1,75)$	b: $(0; 1; 0)$	=0
$M_f=(-1,5; 1; 3)$	$(-1,5+1,5; 1-1; -1,25-3)$	$(0; 0; -1,75)$	c: $(6; -8; 0)$	=0

Monge liegt auf allen diesen 6 Ebenen der Kantenmitte senkrecht zur Gegenkante

Beim Dreieck ist die Verbindung zweier Seitenmitten parallel zur dritten Seite und genau halb so groß wie diese! Diese drei Mittenparallelen bilden das Mittendreieck, das aus dem Originaldreieck durch eine zentrische Streckung an  $S$  mit  $k = -\frac{1}{2}$  hervor geht. Der Umkreis dieses Seitenmittendreiecks (EULER-Kreis) erhält man ebenso aus dem Dreiecksumkreis durch eine zentrische Streckung an  $S$  mit  $k = -\frac{1}{2}$ . Selbiges gilt für die Mitte des EULER-Kreises, das ist das Umreiszentrum  $M_u$  zentrisch gestreckt an  $S$  mit  $k = -\frac{1}{2}$ , und  $M_{\text{Euler}}$  (das Feuerbachkreiszentrum) liegt genau in der Mitte zwischen  $H$  und  $M_u$



Vergleich mit dem EULER-Kreis, der auch 9-Punkte-Kreis heißt: Weiß ist das Höhenfußpunktdreieck, himmelblau das **EULER-Dreieck** der Mitten der längeren Höhenabschnitte zu den Ecken hin, welches das an der EULER-Kreis-Mitte punktgespiegelte

rote **Mittendreieck** ist. Die Eulergerade kann man durch eine Kreisspiegelung in den EULER-Kreis abbilden.

Nun gibt es bei den Pyramiden ein ganz analoges Phänomen.

Es sind aber nicht die Kantenmitten, die **eine zur Ausgangspyramide ähnliche Pyramide** bilden, sondern die 4 Dreiecksschwerpunkte, und  $k$  ist nicht mehr  $-\frac{1}{2}$  sondern  $-\frac{1}{3}$  und **der EULER-Kreis wird zur Kugel!**

## Die **Mittenpyramide**

Die Ecken der Mittenpyramide sind die Schwerpunkte der Grenzdreiecke, und als solche leicht als arithmetisches Mittel der Eck-Koordinaten zu berechnen.

$$A = (6; 0; 0), \quad B = (0, 8, 0), \quad C = \text{Ursprung und Spitze} \quad D = (-3, 2, 6)$$

$$\text{Beginnen wir mit dem Basisdreieck } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}(A+B+C) = \frac{1}{3}(6, 8, 0) \\ = S_{\Delta ABC} = \mathbf{(2, 8/3, 0)}$$

Nun das größte von allen, das `Hypotenusen`-Dreieck

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{3}(A+B+D) = \frac{1}{3}(3, 10, 6) = \mathbf{(1, 3, 2)}$$

Dann das einzig stumpfwinklige

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3}(A+C+D) = \frac{1}{3}(3, 2, 6) = \mathbf{(1, 0, 2)}$$



und das dritte 'pseudo' Kathetendreieck

$$S_{\Delta BCD} = 1/3(B+C+D) = 1/3(-3, 10, 6) = \mathbf{(-1, 3,3p3, 2)}$$

Der Schwerpunkt von der größten Fläche  $S_{\Delta ABD}$  ist das Bild des Ursprungs. Seine Entfernung zu den anderen 3 Schwerpunkten:

$$\text{zum Basis } \Delta ABC: (1, 3,3p3, 2) - \mathbf{(2, 8/3, 0)} = \boxed{(-1, 2/3, -2)}$$

$$\text{Länge } 1/3\sqrt{49} = 7/3$$

das ist der dritte Teil von  $f = C$  Spitze

zum stumpfwinkligen  $S_{\Delta ACD}$

$$(1, 3,3p3, 2) - \mathbf{(1, 0,6p6, 2)} = (0; 8/3; 0) \quad \text{Länge } b/3$$

zum  $S_{\Delta BCD} = 1/3(B+C+D)$

$$(1, 3,3p3, 2) - \mathbf{(-1, 3,3p3, 2)} = (-2; 0; 0) \quad \text{Länge } a/3$$

Die anderen Längen sind die vom zentrisch-gestreckten 'Hypotenusen' - Dreieck; ein Drittel von 9, 10 und 11:

$$S_{\Delta ACD} S_{\Delta ABC} = \mathbf{(2, 8/3, 0)} - \mathbf{(1, 0,6p6, 2)} = (1; 2, -2)$$

Länge  $1/3 \sqrt{9} = 3$  ist die Länge der Bildkante von  $d=9$

$$S_{\Delta BCD} = \mathbf{(-1, 3,3p3, 2)} \text{ zu } S_{\Delta ACD} = \mathbf{(1, 0,6p6, 2)}$$

$$\text{Differenz } S_{\Delta BCD} S_{\Delta ACD} = (-2; 8/3; 0)$$

hat die Länge  $10/3$  ist also das Bild der Basis-Hypotenuse  $c$

$$S_{\Delta BCD} = \mathbf{(-1, 10/3, 2)} \text{ zu } S_{\Delta ABC} = \mathbf{(2, 8/3, 0)}$$

$$\text{Differenz } S_{\Delta BCD} S_{\Delta ABC} = (-3; 2; 3; 2)$$

hat die Länge  $11/3$  ist also das Bild der allerlängsten Kante  $e=11$

Der **Körper-Schwerpunkt** ist  $\frac{1}{4}(A+B+Spitze)=$

$$\frac{1}{4}(3; 10, 6) = (0.75, 2.5, 1.5)$$

Der Ursprung=C an ihm zentrisch gesteckt mit  $k = -1/3$  ergibt

$$\frac{1}{3}(3; 10, 6) = (1, 10/3, 2)$$

$$\text{Länge } \frac{1}{3} \sqrt{145} \sim 4,014$$

und das ist  $S_{\Delta ABD}$

$$\text{denn } S_{\Delta ABD} = \frac{1}{3}(A+B+D) = \frac{1}{3}(3, 10, 6) = \mathbf{(1, 3,3p3, 2)}$$

## Das Zentrum der EULER-Kugel

Das EULER-Kugel Zentrum ist die  
am Schwerpunkt **(0.75, 2.5, 1.5 )**  
zentrisch gestreckte Umkugelmittle

$$\mathbf{M}_u = (3, 4, 4.25)$$

mit  $k = -1/3$

$$(3, 4, 4.25) - (0.75, 2.5, 1.5) = (2.25, 1.5, 2.75)$$

$$(2.25, 1.5, 2.75) \text{ mal } 1 + 1/3 = 4/3$$

ist  $(10/3; 2; 11/3)$

$$(3, 4, 4.25) - (10/3; 2; 11/3) = \boxed{(-1/3; 2; 7/12)}$$

Liegt  $(-1/3; 2; 7/12)$  auf der **EULER-Geraden**

$$\mathbf{x} = (3, 4, 4.25) + \lambda(10, 6, 11)$$

$$-1/3 = 3 + 10\lambda$$

$$\lambda = -1/3$$

$$2 = 4 + 6\lambda \text{ OK}$$

$$7/12 = 17/4 - 11/3 \text{ ist auch OK}$$

Das **Zentrum der EULER-Kugel** ist

$$\mathbf{M}_{\text{EULER}} = (-1/3; 2; 7/12)$$

und liegt auf der EULER-Geraden!

Gibt es nun auch die **zweite Eulergerade**

(auch **NAGEL-Gerade** genannt)?

In Analogie zum Dreieck, geht sie durch den **Schwerpunkt S** und die **Inkreismitte  $M_i$**  und zudem noch durch den **Nagelpunkt** (den es bei Pyramiden ebenso wie den Gergonnepunkt i. a. nicht gibt<sup>15</sup>). Und durch den Spiekerpunkt, den Inkreismittelpunkt des aus den Mittenparallelen gebildeten Mitten-Dreiecks, der auch Spiekerkreis genannt wird.

---

<sup>15</sup> Dass es Simplices mit Gergonnepunkt bzw. Nagelpunkt gibt (Ob gergonnische Tetraeder auch nagelsche sind?) liest man bei den Polen Edwin Kozniwsky & Renata A. Gorska

>>**Gergonne and Nagel Points for Simplices in the n-Dimensional Space**<<  
Journal of Geometry and Graphics, Vol4 (2000), No.2, 119 127



Man kann mit einer **Kreispiegelung** die **EULER-Gerade** in den **EULER-Kreis** abbilden!

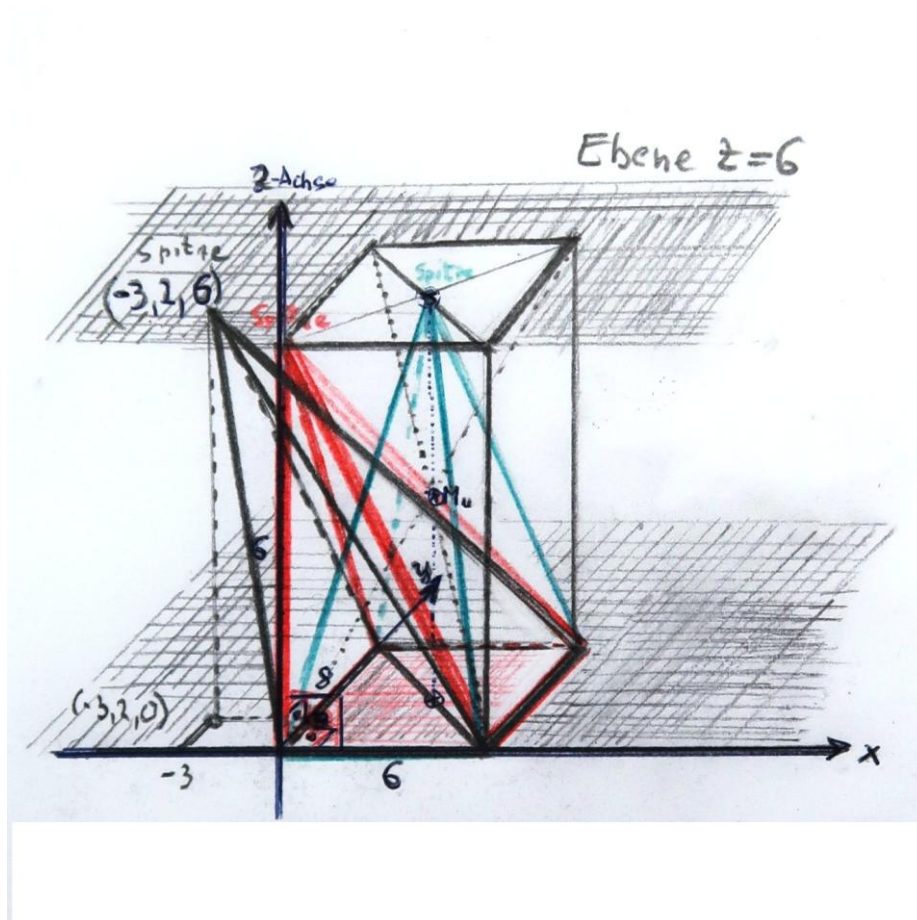
Geht das auch mit einer Kugelspiegelung?

Welche Punkte liegen auf der EULER-Kugel, wenn diese „Feuerbachkugel“ auch die **12-Punkte-Kugel** genannt wird, entsprechend wie der feuerbachsche EULER-Kreis zuweilen auch **9-Punkte Kreis** genannt wird?

Die Berechnungen weiterer Besonderer Punkte wie die Zentren der Ankugeln oder Gergonne-, Nagelpunkt etc. sind aber an dieser Pyramide schwierig bis unmöglich, weshalb wir nun die eulerschen Pyramiden betrachten.

Untersuchen wir zunächst eine (volumengleiche) **EULER-Pyramide**, weil hier die Berechnungen wesentlich einfacher und vor allem alles viel übersichtlicher bzw. anschaulicher werden!

## Die EULER-Pyramide



Liegt die Spitze der Pyramide auf derselben Parallel-Ebene zur  $(x,y)$ -Basis-Ebene, wie hier die Ebene  $z = 6$ , so haben bei gleicher Basisfläche die Pyramiden dasselbe Volumen (hier 48)

Cavalierisches Prinzip (1598—1647)

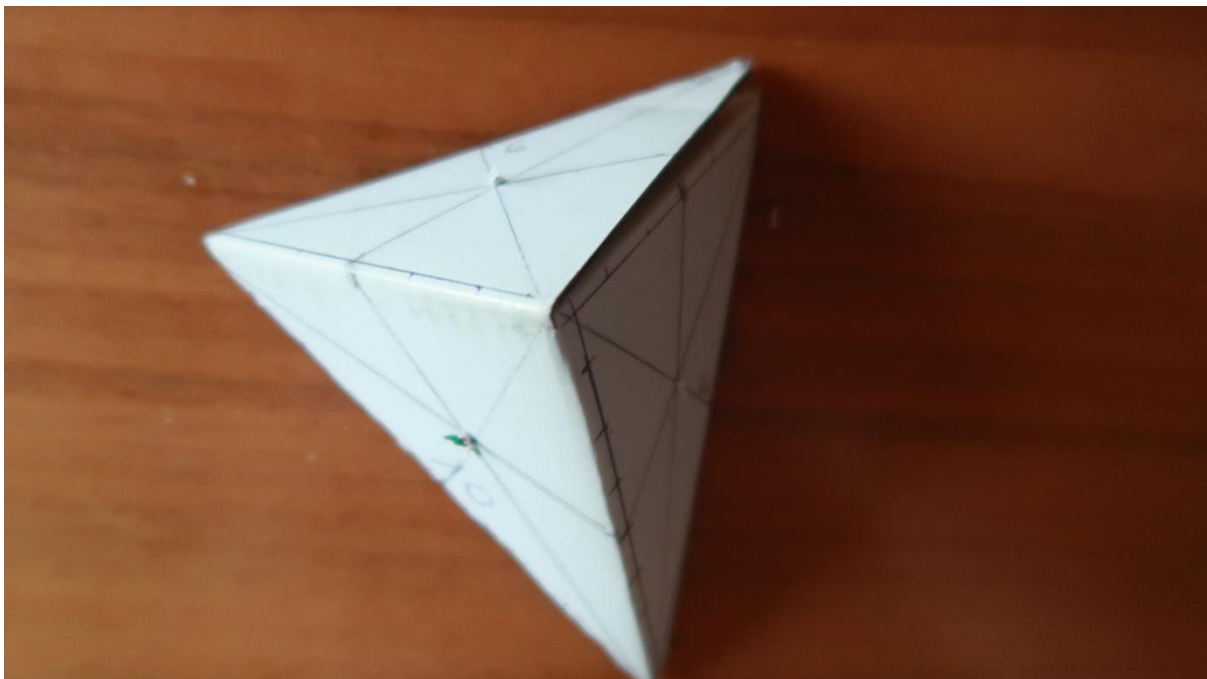
Bei der **roten EULER-Pyramide** mit einer Ecke C im Ursprung, liegen die drei Pyramiden-Ecken auf den drei Achsen, bei

$$x = 6, y = 8 \text{ und } z = 6.$$

Sie hat dasselbe Volumen wie die Standardpyramide ( $V=48$ )

Die Euler-Pyramide ist **das dreidimensionale Analogon zum rechtwinkligen Dreieck**:

Einen schrägen Schnitt an einem Backsteinecke (wir schneiden die Ecke eines Backsteins ab), liefert uns eine Euler-Pyramide. Hier treten gleich drei rechtwinklige Begrenzungs-dreiecke in der Oktanten-Raumwinkel-Ecke von  $-\frac{1}{2}\pi$  zusammen.



Das Analogon zum rechten Winkel ist bei der **Eulerpyramide** diese hier oben liegende rechtwinklige Raumecke, die von drei rechtwinkligen Dreiecken gegrenzt wird. Grundfläche ist auch hier das doppelte Standard-Dreieck mit der Körperhöhe  $h=6$  (auf der z-Achse liegend).

Das Volumen ist also auch  $V = 48$

Werden wir gleich mal allgemein!



**Der Einfachheit halber legen wir die `rechte` Raumwinkel-Ecke in den Ursprung und erhalten somit drei auf den  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Achsen liegende Kanten, deren Produkt das sechsfache Volumen ist  $abc = 6V$**

( $V = 1/3$  Grundfläche mal Höhe =  $1/2$  mal  $1/2ab$  mal Höhe  $c$ .)

Die drei Kanten können durch Punktspiegelung an  $1/2 (a, b, c)$  zu einem Quader (Backstein) der Länge  $a$ , Breite  $b$  und Höhe  $c$  ergänzt werden<sup>16</sup>. Und die Mitte des Quaders ist das **Umkugel-Zentrum**

$$\text{Umkugelzentrum } M_u = (a/2; b/2; c/2) = 1/2 (a, b, c)$$

$M_u$  ist der Raumdiagonalschnitt mit  $R = 1/2\sqrt{(\sum a_i^2)}$

Im Beispiel ist  $a=6$ ,  $b=8$  und die Körperhöhe  $c = 6$

Somit ist das Umkugelzentrum  $M_u = (3, 4, 3)$  und die halbe Raumdiagonale des entsprechenden Quaders hat die Länge  $\sqrt{6^2+8^2+6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$  und somit ist  $R = \sqrt{34} \approx 5,83$  irrational

$$M_i = (r; r; r) \text{ mit den Inkugelradius } r = 1/2abc / O$$

<sup>16</sup> Eigentlich braucht man ja das dreifache Volumen, und nicht die doppelte Fläche wie beim rechth. Dreieck. Jedoch, wie man beim rechtwinkligen Dreieck durch Punktspiegelung an der Hypotenusenmitte ein Rechteck erzeugt, will man im räumlichen Fall den Quader haben, dessen Raumdiagonalschnitt die Umkugel des Quaders und damit auch des Tetraeders bilden. Nicht wie beim rechtwinkligen Dreieck ist  $M_u$  in der Mitte des Hypotenusendreiecks bzw. dessen Schwerpunkt, der bei  $1/3 (a, b, c)$  liegt, sondern  $M_u$  liegt bei  $1/2(a, b, c)$  genau im Schnitt der Raumdiagonalen, welche nach Pythagoras die Länge  $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$  hat, und deren Hälfte zum Umkreisradius  $R$  wird! ,

Die Oberfläche O werden wir an unserem Beispiel gleich nachher mal explizit berechnen.

Der **Schwerpunkt S** (zuvor **G** wie Gravitationszentrum da, S = Spitze) der EULER-Pyramide

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{4} \{ (0, 0, 0) + (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c) \} \\ &= \frac{1}{4} (a, b, c) \end{aligned}$$

Der Flächenschwerpunkt der Hypotenusenfläche liegen auch auf der EULER-Geraden, bei  $\frac{1}{3} (a, b, c)$ , denn er ist die Quaderecke der **Mittenpyramide** ( $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ). Beide haben denselben Körperschwerpunkt S und gehen durch H und  $M_u$  bzw. deren an S zentrisch gestreckten Bilder mit  $k = -1/3$ . Beide Pyramiden haben identische EULER-Ursprungsgeraden

$$\mathbf{x} = \lambda (a; b; c)$$

Der **Höhenschnittpunkt  $H^{17}$**  liegt im Ursprung! Dies ist für uns günstig, denn durch H und UMKUGELMITTELPUNKT  $M_u$  geht die EULER-Gerade  $M_uH$ , auf der auch der Schwerpunkt liegt, und bei Pyramiden sogar genau in der Mitte von  $M_uH$ !

---

<sup>17</sup> Beim Eulertetraeder ist der Höhenfußpunkt H an der Quaderecke zugleich der **Mongesche** Punkt.

**Allerdings hat nicht jede Pyramide einen Höhengschnittpunkt!** *Unsere Standardpyramide mit den Kantenlängen von 6 bis 11 hat keinen. An dessen Stelle tritt dann der sog. Monge-Punkt.*

Kehren wir nun unserem konkreten Beispiel bzw. der Berechnung von O zurück:

$A=(6,0,0)$   $B=(0,8,0)$   $C=(0,0,6)$  und Körperhöhe 6,  $V=48$

Berechnen wir nun die Oberfläche bei unserer Beispiels-Euler-Pyramide!

Das rechtwinklige Basisdreieck  $\Delta OAB$  ist das doppelte Std-DREIECK

mit  $a=8$ ,  $b=6$  und Hypotenuse  $c=10^{18}$

Rechtwinkliges Dreieck  $\Delta OAC$   $b=6$ ,  $h=6$

(ist also gleichschenkelig-rechtwinklig)

Rechtwinkliges Dreieck  $\Delta OBC$ :  $a=8$ ,  $h=6$  (ist auch doppeltes Std.-Dreieck)

Größtes und einzig spitzwinkliges Dreieck ist  $\Delta ABC$

(hier ein gleichschenkliges **Hypotenusendreieck**)

$d=10$ ,  $c=10$  und Basis  $6\sqrt{2} \approx 8,485$  ( $h=\sqrt{2} \cdot 6 \approx 8,485$ )

Die drei rechtwinkligen Kathetendreiecksflächen haben die Flächeninhalte

---

<sup>18</sup> Eigentlich habe ich immer  $a=6$ ,  $b=8$  und  $c=h=6$  verwendet, Hier nicht, sorry!

$$A_{\Delta OAB} = 24, \quad A_{\Delta OAC} = 18 \quad \text{und} \quad A_{\Delta OBC} = 24$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{82} = 6\sqrt{41} \approx 38,41874542$$


---

$$\Sigma 1024,4187454..$$

was wegen  $V = \frac{1}{3}rO$  einen **irrationalen Inkugelradius** von  $r = 3V/O$  etwa 1,379 ergibt

$$r = \frac{144}{(66+6\sqrt{41})} \approx 1,379062729$$

Probe: Verdoppeln wir die Kathetendreiecksflächen, quadrieren und summieren diese, dann erhalten wir  $2 \cdot 48^2 + 36^2 = 5904$ . Das sollte gleich dem Quadrat der doppelten Hypotenusenfläche sein, womit  $A_{\Delta ABC}$  etwa 38,4187 ist,

das ist nämlich **der räumliche Satz des Pythagoras!**

Der Inkugelmittelpunkt ist also

$$M_i = (r; r; r) \approx (1,379; 1,379; 1,379) !$$

Mit  $H = (0, 0, 0) = \mathbf{O}$ ,  $\mathbf{S} = \frac{1}{4}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  und  $\mathbf{M}_u = \frac{1}{2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ . kann man sich schnell davon überzeugen, dass diese Punkte **auf der EULER-Geraden** liegen, die eine Ursprungsgerade ist:

$$\mathbf{Vektor} \mathbf{x} = \lambda (a; b; c) \quad \text{Lambda ist der Parameter}^{19}$$

$$\text{hier} \quad \mathbf{x} = \lambda (3; 4; 3)$$

wie beim rechtwinkligen Dreieck, wenn die rechtwinklige Ecke H im Ursprung liegt, und wo aber der Schwerpunkt die Strecke

---

<sup>19</sup> Geraden kann man im Raum nur mit Parameterformen beschreiben, da Normalformen oder Koordinatengleichungen nur Ebenen darstellen!

MuH im Verhältnis  $HS : SM_u$  2:1 teilt und das Zentrum des Eulerkreises genau die Mitte von  $HM_u$  ist, während der Schwerpunkt nun die Mitte von  $HM_u$  ist!

Apropos **EULER-Kreis**; gibt es beim Tetraeder nun eine **EULER-Kugel**, deren **Zentrum auch auf der Euler-Geraden** liegt.

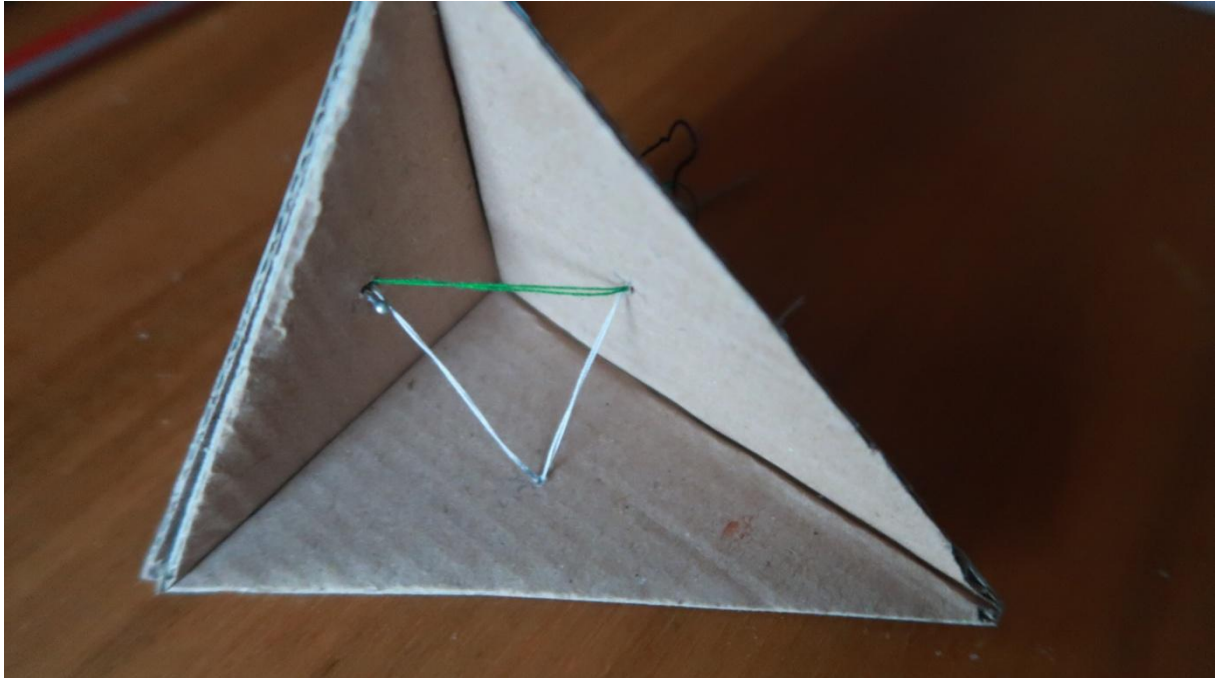
Da es 6 Kantenmitten gibt und nicht 3 wie beim Dreieck, durch die der Eulerkreis geht, so daß er zum Umkreis des Mittendreiecks wird, verwendet man die nun die vier Schwerpunkte der 4 Randdreiecke, die ja auch wieder einen (auf dem Kopf stehenden) zum Ausgangstetraeder ähnlichen Tetraeder bilden. Während aber beim Dreieck die Mittenparallelen halb so groß sind, und das Mittendreieck mit  $k = -1/2$  am Schwerpunkt gestreckte Ausgangsdreieck ist, wird der Streckungsparameter bei der ähnlichen Mittenpyramide  $k = -1/3$  ! Die Kantenlängen sind also ein Drittel so lang wie bei der Ausgangspyramide

Bei einer vierdimensionalen EULER-Pyramide hat man dann eine am Schwerpunkt zentrisch gestreckte „Mittenpyramide“ mit  $k = -1/4$ , die also ein Viertel-Längen hat, und im n-Dimensionalen eine  $1/n$ -mal so kleine.

### **Im Unendlichdimensionalen,**

– sofern es einen solchen Raum überhaupt geben könnte -, würde dieses ähnliche „Mittengebilde“ allerdings verschwinden, d. h. zu einem Punkt degenerieren, denn der Grenzwert vom Kehrwert von  $n$  ist Null für  $n$  gegen unendlich ( **$\lim 1/n = 0$**  für  $n \rightarrow \infty$ )!

Kann aber ein Punkt zu der Ausgangspyramide ähnlich sein?



Die Mittenpyramide einer EULER-Pyramide ist auch eulersch,  
und ihre Quaderecke liegt auch auf der EULER-Geraden!

Diese drei Schwerpunkte der Kathetenflächen bilden ein Dreieck, das parallel zur (hier nicht zu sehenden) schrägen Hypotenusenfläche und ein Drittel so lang wie diese ist.

**Den Schwerpunkt der Hypotenusenfläche** erhält man, wenn man von dem unteren Kathetenflächenschwerpunkt der Grundfläche **um 2 senkrecht (also in z-Richtung) nach oben geht** (also einen Stecknadelkopf durchsteckte, dessen Kopf dann senkrecht mit diesen drei verbunden wird). Der hier nicht dargestellte **noch fehlende 4. Hypotenusen-Schwerpunkt ist die Quaderecke**, deren Verbindungen zu den anderen drei hier dargestellten Schwerpunkten **auf allen drei Kathetenflächen senkrecht** steht, so dass die Mittenpyramide der Ausgangspyramide direkt ähnlich ist.

Analog zum EULER-Kreis nenne ich die Umkugel der Mittenpyramide als die EULER-Kugel, deren auf der EULER-Geraden liegendes Zentrum  $M_{\text{Euler}}$  durch zentrische Streckung der Umkugelmitte am Schwerpunkt mit  $k = \text{minus } 1/3$  abgebildet wird!

$M_{\text{Euler}}$  ist dann aber natürlich nicht mehr die Mitte von  $M_uH$ !

In unserem Euler-Pyramidenbeispiel können wir die vier **Schwerpunkte** recht einfach berechnen, indem wir jeweils die **Ecken summieren und durch drei teilen**.

Berechnen wir doch die vier Schwerpunkte der Grenzdreiecke:

Das rechtwinklige Basisdreieck OAB ist das doppelt so große Standarddreieck

$$S_{OAB} = 1/3(O+A+B) = 1/3 (6, 8, 0) = (2, 8/3, 0)$$

$$S_{OAC} = 1/3(O+A+C) = 1/3 (6, 0, 6) = (2, 0, 2)$$

$$S_{OBC} = 1/3(O+B+C) = 1/3 (0, 8, 6) = (0, 8/3, 2)$$

$$S_{ABC} = (2, 2, 3p3, 2)$$

Die **Verbindungen von  $S_{ABC}$**

**(dem Höhenfußpunkt der Mittenpyramide, die rechth. Raumecke)**

**zu den drei anderen Kathetenflächenschwerpunkten**

stehen alle paarweise senkrecht aufeinander !

$$S_{ABC} S_{OAC} = (2, 0, 2) - (2, 2, 3\sqrt{3}, 2) = (0, -2, 3\sqrt{3}, 0) \quad \text{Länge } 8/3$$

$$S_{ABC} S_{OAB} = (2, 8/3, 2) - (2, 2, 3\sqrt{3}, 0) = (0, 0, 2) \quad \text{Länge } 2$$

$$S_{ABC} S_{OBA} = (2, 8/3, 2) - (0, 8/3, 2) = (2, 0, 0) \quad \text{Länge } 2$$

## Die Skalarprodukte je zweier verschwinden!

Die Längen der abgebildeten Achsen-Kanten a, b und c sind genau ein Drittel so groß!

Die Kantenlängen der Mittenpyramide sind genau der dritte Teil.

Die Umkugel der Mittenpyramide ist die EULER-Kugel. Sie ist die an S zentrisch mit  $k=-1/3$  gestreckte Umkugel. Für deren Mittelpunkt gilt dasselbe, er ist der am Schwerpunkt  $(1,5, 2, 1,5)$  zentrisch gestreckte Umkugelmittelpunkt  $M_u = (3, 4, 3)$  mit  $k=-1/3$ .

$M_u = \frac{1}{2}(a, b, c)$      $S = \frac{1}{4}(a, b, c)$      $1/3$  von  $M_u S$  ist  $\frac{1}{2}(a, b, c)$  mal  $1/3$  und wegen dem Minuszeichen wird auf die andere Seite von  $S = \frac{1}{4}(a, b, c)$  getreckt, was  $S = \frac{1}{4}(a, b, c) - 1/3$  mal  $\frac{1}{4}(a, b, c) = (3-1)/12 (a, b, c) = 1/6 (a, b, c)$  ist.

<b><math>M_{Euler} = 1/6 (a, b, c)</math> mit dem dem Radius <math>1/3 R</math></b>
---

Hier  $M_{Euler} = (1, 4/3, 1)$  mit  $r_{Euler} = 1/3 \sqrt{2\sqrt{17}} \approx 1,94$

**EULER-Kugelgleichung  $(x-1)^2 + (y-4/3)^2 + (z-1)^2 = 34/9$**

$S_{ABC} = (2, 2, 3\sqrt{3}, 2)$  ist das Doppelte von  $M_{Euler} = (1, -4/3; 1)$

$S_{OAC} = (2, 0, 2)$  ist  $|(1, -4/3, 1)| = \sqrt{(34/9)}$  entfernt

$S_{OAB} = (2, 8/3, 0)$  ist auch  $|(1, 4/3, -1)| = 1/3 \sqrt{34}$  entfernt



## Die Höhenfusspunkte, liegen auf der EULER-Kugel

$$(x-1)^2+(y-4/3)^2+(z-1)^2 = 34/9$$

Das Hypotenusendreieck hat den Normalenvektor

(6, -8, 0) kreuz (6, 0,-6) Vektorprodukt

$$\begin{array}{cc} 6 & 6 \\ -8 & 0 \\ 0 & -6 \\ 6 & 6 \\ -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{array}$$

Erste und letzte Zeile streichen und 3 mal Zweierdeterminanten bilden

Ergibt  $\mathbf{n}=(48, 36, 48)$  oder (4, 3, 4)

Hypotenusenebene in Achsenabschnittsform

$$\text{ist } x/6+y/8+z/6 = 1$$

$$\text{oder } 8x+6y+8z= 48$$

$$\mathbf{4x+3y+4z= 24}$$

Geschnitten mit der Gerade  $\mathbf{x} = \lambda(4, 3, 4)$  ist der Höhenfußpunkt

$$16 \lambda + 9 \lambda + 16 \lambda = 24$$

$$\lambda = 24/41$$

und der Schnittpunkt ist  $\boxed{24/41(4, 3, 4)}$

Er erfüllt die **EULER-Kugelgleichung** !

$$(x-1)^2+(y-4/3)^2+(z-1)^2 = 34/9$$

$$(55)^2+(17,3p3)^2+(55)^2 \text{ ?=? } 34/9 \text{ mal } 41^2$$

$$2\text{mal}3025+(17,3p3)^2 = 6050+300,4p4 \text{ ?=? } 6350+4/9 \text{ yes, it is}$$

Die andern Höhenfüße sind im Ursprung, durch den die EULERKugel auch geht, denn  $(1, 4/3, 1)^2 = 2+(4/3)^2=3,7p7 = 34/9$

## Die Ankugeln

Die Krümmungssumme der vier Ankugeln ist gerade das Doppelte des inversen Inkugelradius (das ist die doppelte Summe inverser Körperhöhen, d.h. die Höhen sind größer bzw. die Ankugelradien kleiner als im ebenen Fall<sup>20</sup>)!

$$k_0 + k_A + k_B + k_C = 2/r$$

**doppelte Inkugelkrümmung**

Die Summe der vier inversen Körperhöhen ist die Inkugelkrümmung!

$$1/h_0 + 1/h_A + 1/h_B + 1/h_C = 1/r$$

(denn die Oberfläche ist  $O = \sum A_i = \sum (3V/h_i)$  und andererseits  $O = 3V/r$  )

**Dazu nehmen wir ein einfache Beispiel einer EULER-Pyramide, bei der Inkugelradius  $r=1$  ist.**

Dazu ist  $A=(3,0,0)$ ,  $B=(0, 6, 0)$  und  $C=(0,0,9)$

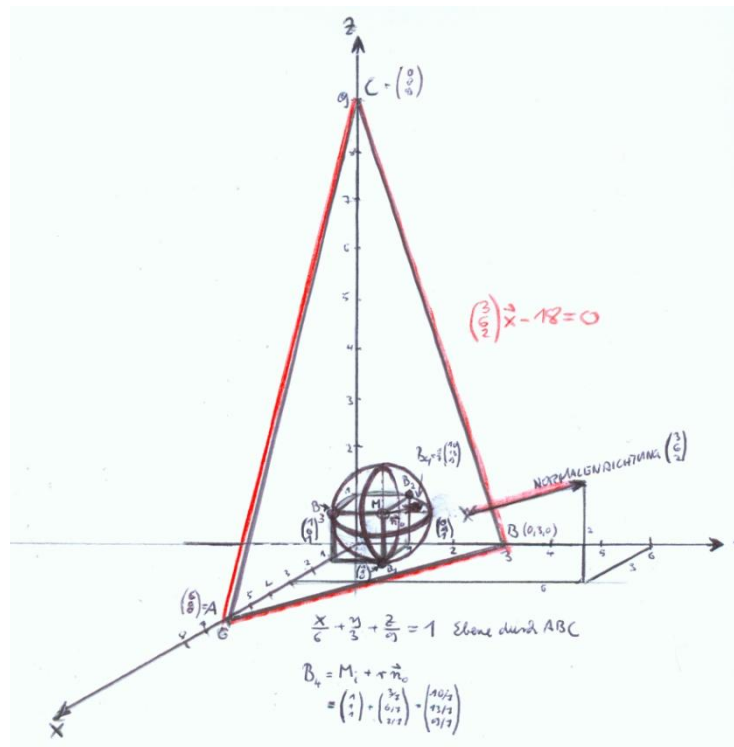
Dann wird nämlich  $V=27$  und  $O = 81 = 3V$

Da das Volumen  $V=1/6 abc=27$  und die Oberfläche  $O=3V/r=9+27+13,5+31,5 = 81$

was  $r = 3V/O = 1$  liefert.

---

<sup>20</sup> Wegen  $\sum 1/h_i = 1/r$  und da **die Summe** der  **$n+1$**  inversen Radien der von außen berührenden Hyperkugeln =  **$(n-1)/r$**  ist, werden die Anhyperkugelradien in noch höheren Dimensionen immer kleiner im Vergleich zu den Körperhöhen, bis sie im Unendlich-Dimensionalen schließlich ganz verschwinden!



Beispiel:  $a=3$ ,  $b=6$  und  $c=9$  mit Inkugelkrümmung  $r = 1$

Die Ankugelmitten sind die die Hypotenusenebene von außen berührende Kugel durch

$$M_O = (4,5; 4,5; 4,5) \text{ mit dem Radius } r_O = 9/2,$$

$$M_A = (-3; 3; 3) \text{ mit } r_A = 3,$$

$$M_B = (1,5; -1,5; 1,5) \text{ mit } r_B = 3/2,$$

$$\text{und } M_C = (9/7; 9/7; -9/7) \text{ mit } r_C = 9/7$$

**Die Krümmungssumme ist  $2/9 + 3/9 + 6/9 + 7/9 = 2$**  (mal  $1/r=1$ )

Wenn wir die Mittelpunkte der Ankugeln mit ihren Krümmungen multiplizieren, erhalten wir erstaunlicherweise immer noch eine richtige Gleichung<sup>21</sup>!

$$\frac{2}{9} (4,5; 4,5; 4,5) + \frac{1}{3} (-3; 3; 3) + \frac{2}{3} (1,5; -1,5; 1,5) + \frac{7}{9} (9/7; 9/7; -9/7) = 2 (1,1,1)$$

Die Körperhöhen sind 3, 6, 9 und die kleinste Hypotenusenkörperhöhe ist

$$18/7 = 2 + 4/7$$

$$(V = \frac{1}{3} G h \text{ Körper mit } G = 63/2)$$

$$\begin{aligned} \text{Summe der 4 inversen Körperhöhen } 1/3 + 1/6 + 1/9 + 7/18 &= \\ &= 18/18 = 1 (= \mathbf{1/r}) \end{aligned}$$

Die **Umkugelmittle** ist  $\mathbf{M}_u = (1,5; 3; 4,5)$

Der **Schwerpunkt** ist die Hälfte davon

$$S = \frac{1}{4} \{ (3, 0, 0) + (0,6,0) + (0,0,9) \} = (\mathbf{0,75; 1,5; 2,25})$$

und die **EULER-Gerade** ist

$$\mathbf{x} = \lambda(3, 6, 9)$$

oder

$$\mathbf{x} = \lambda(1, 2, 3)$$

<sup>21</sup> Man denke an Descartes unbekannte Formel, die man komplex erweitern kann.

Berechne wir noch die Ecken des Mitten-Tetraeders:

### Die vier Schwerpunkte der Begrenzungsflächen

$$S_{OAB} = 1/3(O+A+B) = 1/3 (3, 6, 0) = (1, 2, 0)$$

$$S_{OAC} = 1/3(O+A+C) = 1/3 (3, 0, 6) = (1, 0, 2)$$

$$S_{OBC} = 1/3(O+B+C) = 1/3 (0, 6, 6) = (0, 2, 2)$$

**$S_{ABC} = (1, 2, 3)$ , das ist der auf der EULER-Geraden liegende Höhengschnittpunkt der Mittenpyramide**

$$S_{ABC} - S_{OAB} = (1, 2, 3) - (1, 2, 0) = (0, 0, 3)$$

$$S_{ABC} - S_{OAC} = (1, 2, 3) - (1, 0, 2) = (0, 2, 1)$$

$$S_{ABC} - S_{OBC} = (1, 2, 3) - (0, 2, 2) = (1, 0, 1)$$

Die Längen sind 1, 2 und 3 genau ein Drittel von a, b und c und daß alle in die Koordinatenachsenrichtungen zeigen, ist Kanton Klarus! Die Ähnlichkeit zur Ausgangspyramide ist ebenso klar, wie der Faktor  $k=-1/3$ .

Zentrum der Streckung ist der Körperschwerpunkt

$$S_K = 1/4\{(3, 6, 9) + (0, 0, 0)\} = (0,75; 1,5; 2,25)$$

**$M_u = (1,5; 3; 4,5)$  wird an diesem  $S_k$  mit  $k=-1/3$  zentrisch gestreckt,**

und wird  $1/3 (3,6,9) = (1; 2; 3) = S_{ABC}$

**und liegt auf der EULER-Geraden  $x = \lambda(3, 6, 9)$**

Der **EULER-Kugel-Mittelpunkt  $1/6 (3,6,9) = (0,5; 1; 1,5)$**

liegt ebenfalls auf EULER-Geraden und ihr Radius ist  $\frac{1}{2}\sqrt{14}$

während  $R = 1,5\sqrt{14}$  ist!

Interessant ist noch die Frage, ob der Ankgeln-Tetraeder

$$M_O = (4,5; 4,5; 4,5) = 4,5 (1,1,1)$$

$$M_A = (-3; 3; 3) = 3(-1, 1, 1)$$

$$M_B = (1,5; -1,5; 1,5) = 1,5(1,-1,1)$$

$$M_C = (9/7; 9/7; -9/7) = 9/7(1, 1,-1)$$

analog zum Dreieck auch zentrisch symmetrisch zum Inkugel-Berührungspunkt-Tetraeder ist?

$$M_{\text{Hypo}} M_A = (-3; 3; 3) - (4,5; 4,5; 4,5) = (1,5; -1,5; -1,5) \quad \text{Länge } 1,5 \sqrt{3} \approx 2,6$$

$$M_{\text{Hypo}} M_B = (1,5; -1,5; 1,5) - (4,5; 4,5; 4,5) = (-3; -6; -3) \quad \text{Länge } \sqrt{54} \approx 7,35$$

$$M_{\text{Hypo}} M_C = (9/7; 9/7; -9/7) - (4,5; 4,5; 4,5) = -15/14 (-3; -3; -5,4) \\ \text{Länge } 15/14 \sqrt{47,16} \approx 7,358$$

$$M_B M_A = (-3; 3; 3)(1,5; -1,5; 1,5) = (-4,5; 4,5; 1,5) \quad \text{Länge } \sqrt{42,75} \approx 6,54$$

$$M_B M_C = (9/7; 9/7; -9/7) - (1,5; -1,5; 1,5) = 1/14(-3; 39; -39) \quad \text{Länge } 1/14 \sqrt{3051} \approx 3,95$$

$$M_A M_C = (9/7; 9/7; -9/7) - (-3; 3; 3) = 1/7(30, -12, -30) \quad \text{Länge } 1/7 \sqrt{1944} \approx 6,3$$

Und nun bräuchten wir aber noch die Inkugelberührungspunkte, für die Berührungspunkt-Pyramide.

Da die Inkugel die Mitte (1,1,1) mit Radius  $r = 1$  hat, sind die Berührungspunkte mit den Kathetenflächen sehr einfach (1,1,0), (1,0,1) und (0,1,1). Die Differenzen (0,1,-1), (-1, 0,-1) und (0,-1,-1) haben alle dieselben Länge  $\sqrt{2}$  aber nur (0,1,-1) und (0,-1,-1) stehen senkrecht aufeinander. Von Ähnlichkeit kann keine Rede sein! Satz mit x, war wohl nix!

Leider können wir kaum **Euler-Pyramide als Standard**

verwenden, denn **den kleinsten rationalen** Euler-Tetraeder erhält man für die drei Kathetenlängen

$$\mathbf{a=44, b=117 \text{ und } c=240,}$$

wobei die drei Hypotenusen folgende Längen haben:

$$\mathbf{d=267, e=244 \text{ und } f=125}$$

$$\text{denn } 44^2+117^2= \mathbf{125^2},$$

$$44^2+240^2= \mathbf{244^2}$$

$$\text{und } 117^2+240^2= \mathbf{267^2}$$

Die *zweitkleinste* `natürliche' Eulerpyramide hat die Kantenlängen **a=85, b=132, c=720, d=157, e=725, f=732** und unterhalb der Kantenlängen von 1000 liegen nur noch drei weitere<sup>22</sup>.

---

<sup>22</sup> Diese und weiteres dazu finden Sie bei Otto Schulz, >>Über Tetraeder mit rationalen Maßzahlen der Kantenlängen und des Volumens.<<.

Eine Doktorarbeit der Uni Leipzig, 1912  
im GDZ (Göttinger Digitalisierungszentrum) unter [www.sub.uni-goettingen.de](http://www.sub.uni-goettingen.de)



ACHOHLAONG

Zurück zur Berechnung von V und dem Umkugelradius R der Standardpyramide (Kantenlängen 6 bis 11 und V=48):

### Das zwölffache **Volumen einer Dreieckspyramide**

über die sechs Kantenlängen ist (Lagrange 1773)

$$\begin{aligned}
 12V = & \sqrt{(-a^2+b^2+c^2-d^2+e^2+f^2) a^2d^2} \\
 & + (a^2-b^2+c^2+d^2-e^2+f^2) b^2e^2 \\
 & + (a^2+b^2-c^2+d^2+e^2-f^2) c^2f^2 \\
 & - \sqrt{(a^2b^2c^2+a^2e^2f^2+b^2d^2f^2+c^2d^2e^2)}
 \end{aligned}$$

Als Beispiel der Standardtetraeder mit den Kantenlängen 6 und ihre sukzessiven Nachfolger 7, 8, 9, 10 und 11 mit V=48

$$\begin{aligned}
 (12V)^2 = & (-6^2+8^2+10^2-9^2+11^2+7^2) 6^29^2 \\
 & + (6^2-8^2+10^2+9^2-11^2+7^2) 8^211^2 \\
 & + (6^2+8^2-10^2+9^2+11^2-7^2) 10^27^2 \\
 & - (6^28^210^2+6^211^27^2+8^29^27^2+10^29^211^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & 217 \times 36 \times 81 + 81 \times 64 \times 121 + 153 \times 4900 - \\
 & -(230400 + 213444 + 254016 + 980100)
 \end{aligned}$$

$$= 632772 + 627264 + 749700 - 1\,677\,960$$

$$= 2\,009\,736 - 1\,677\,960 = 331\,776 = 576^2$$

Somit ist  $V = 576/12 = 48$

(was wir sowieso schon lange wußten!)

Nur unter Anwendung des Satzes von Pythagoras bewies Arno **Fehringer** im September 2007 (→Mathematikgarten npage), dass der Umkugelradius R einer beliebigen Dreieckspyramide auch nur durch seine Kanten berechenbar ist als

$$R = \sqrt{[(ad+be+cf)(-ad+be+cf)(ad-be+cf)(ad+be-cf)]/24V} .,$$

wobei **a** und **d**, **b** und **e** sowie **c** und **f** Gegenkanten sind. Daher gilt für das 8-fache Produkt der beiden Kugelradien die **Fehringer-Formel**<sup>23</sup>:

$$8rR = \sqrt{[(ad+be+cf) (-ad+be+cf) (ad-be+cf) (ad+be-cf)]} / \sqrt{O}$$

<sup>23</sup> Vergleiche mit der Formel  $2rR = abc/(a+b+c)$  für Dreiecke. An Stelle des Dreiecks-Umfangs im Nenner, steht nun die Oberfläche als die Summe der vier die Pyramide begrenzenden Dreiecksflächen. Diese Formel könnte auch **Crelle-Formel** heißen, denn die Formel  $24RV = \sqrt{[(ad+be+cf) (-ad+be+cf) (ad-be+cf) (ad+be-cf)]}$  wurde vermutlich schon im 19. Jh. von August Leopold **Crelle** (1780-1855) entdeckt.

**Den Umkugelradius R für die Standard-Pyramide mit der Fehringformel:**

a=6, b=8, c=10, d=9, e=11 und f=7 mit **V = 48**

$$\begin{aligned} & \sqrt{[(ad+be+cf) (-ad+be+cf) (ad-be+cf) (ad+be-cf)]} \\ &= \sqrt{(54+88+70) (-54+88+70) (54-88+70) (54+88-0)} \\ &= \sqrt{(212 \times 110 \times 36 \times 72)} = 36\sqrt{(2 \times 4 \times 53 \times 2 \times 55)} = 144\sqrt{(5 \times 11 \times 53)} \text{ falsch} \\ & \text{falsch} \sqrt{(513 \times 53)} \end{aligned}$$

Das Begrenzungsdreieck mit a=6, b=8 und c=10 hat die Fläche

$$\begin{aligned} O_{abc} &= \frac{1}{4} \sqrt{[2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)]} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{[2(48^2 + 60^2 + 80^2) - (1296 + 4096 + 10000)]} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(24608 - 15392)} = \frac{1}{4} \sqrt{9216} = 24 \\ & \text{(klar, die vierfache Fläche von 3,4,5 mit A=6)} \end{aligned}$$

Das Begrenzungsdreieck mit c=10, d=9 und e=11 hat die Fläche<sup>24</sup>

$$\begin{aligned} O_{cde} &= \frac{1}{4} \sqrt{[2(90^2 + 110^2 + 99^2) - (10000 + 6561 + 14641)]} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(60002 - 31202)} = \sqrt{1800} = \mathbf{30\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Das Begrenzungsdreieck mit a=6, e=11 und f=7 hat die Fläche

$$O_{aef} = \mathbf{6\sqrt{(2 \times 5)}}$$

---

<sup>24</sup> Einfacher geht die Flächenberechnung über  $\frac{1}{2}ur$  mit  $r = \sqrt{[xyz/(x+y+z)]}$

$$A^2 = xyz(x+y+z)$$

z.B.: 9, 10, 11 liefert als halbe Differenzen

$\frac{1}{2}(9+10-11)=4, 5$  und  $6$  mit der Summe  $4+5+6=3 \times 5$  und daher

$$A = \sqrt{[4 \times 5 \times 6 \times (3 \times 5)]} = \sqrt{[4 \times 2 \times (3 \times 5)^2]} = 15\sqrt{8} = 30\sqrt{2}$$

Das Begrenzungsdreieck mit  $b=8$ ,  $d=9$  und  $f=7$  hat die Fläche

$$O_{bdf} = \sqrt{720} = \mathbf{12\sqrt{5}}$$

Somit ist die **Oberfläche**  $O = 24 + 30\sqrt{2} + 6\sqrt{(2 \times 5)} + 12\sqrt{5} \approx 112,2328886..$

**nicht rational<sup>25</sup>**

und  $8rR = 144\sqrt{(5 \times 11 \times 53)} / \{24 + 30\sqrt{2} + 6\sqrt{(2 \times 5)} + 12\sqrt{5}\} \approx 69,27262278$

**Inkugelradius** ist  $r = 3V/O = 144 / \{24 + 30\sqrt{2} + 6\sqrt{(2 \times 5)} + 12\sqrt{5}\} \approx 1,28328886..$

**Umkugelradius: R**

$$\dots R = \sqrt{[57\ 148\ 416] / 1152}$$

$$= \sqrt{(2^{10} 3^4 689) / (2^5 9)}$$

$$= \sqrt{(689) / 4}$$

$$\mathbf{R = \frac{1}{4}\sqrt{(13 \text{ mal } 53)}}$$

$$\approx \mathbf{6,56}$$

**Beide Radien sind irrational! (bei rationalen bzw. sogar ganzzahligen Kanten und Volumen**

---

<sup>25</sup> Sind beispielsweise die Gegenkantenprodukte gleich (sog. isodynamische Tetraeder), dann ist bei rationalem Volumen der Umkugelradius immer irrational wegen  $R = \text{Gegenkantenprodukt}^4 \sqrt{3} / 12V$  (vergleiche die  $\sqrt{3}$  bei der Gleichseitigkeit eines Dreiecks)

Nun können wir die **Umkugelmittle**  $M_u$  berechnen!

Jeder Punkt, der gleichweit von den Basisdreiecksecken A, B und C entfernt ist, liegt auf der Senkrechten der Umkreismittle des Basisdreiecks, also auf der Geraden  $(3, 4, z)$ <sup>26</sup>

Die Entfernung zum Ursprung ist der Umkugelradius R:

$$\sqrt{(3^2+4^2+z^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{(13 \text{ mal } 53)}$$

$$z = \sqrt{(689/16 - 25)} = \sqrt{18,0625} = 4,25$$

Das Zentrum der Umkugel unsere Standardpyramide ist

$$M_u = (3, 4, 4\frac{1}{4})$$

Der **Schwerpunkt** ist  $\frac{1}{4}\{(6,0,0)+(0,8,0)+(-3,2,6)\} = (0,75, 2,5, 1,5)$

Richtungsvektor der Euler-Geraden  $M_uS$  ist

$$(3, 4, 4.25)-(0.75, 2.5, 1.5) = (2.25, 1.5, 2.75)$$

Das Vierfache davon ist  $\mathbf{n}=(10, 6, 11)$  und daher

die **EULER-Gerade**

$$\mathbf{x} = (3, 4, 4,25) + \lambda(10, 6, 11)$$

---

<sup>26</sup> Er muß auf der Senkrechten zur Grundebene durch  $M_u = \frac{1}{2}(3, 4)$  liegen, da nur dort die Entfernungen zu den drei Grunddecken A, B und C gleich sind!